

UNIVERSAL  
LIBRARY

**OU\_224681**

UNIVERSAL  
LIBRARY





بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

# تشریف مساواتیں

ایڈیٹر کے مکمل احصا کے آخری پٹی پر کار کا مجموعہ

قاضی محمد حسین صاحب ایم۔ اے  
پروفیسر ریاضیات، گلشن جامو عثمانیہ  
حیدر آباد دکن

۱۰۷-۱۰۸

۱۳۳۱ھ ۱۳۳۲ھ ۱۹۱۳ء

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

یہ کتاب سرس میکملن کمپنی کی اجازت سے  
جن کو حقوق کاپی رائٹ حاصل ہیں  
طبع کی گئی ہے۔

# مضامین

## تفرقی مساواتیں

نمبر	مضمون
۱	باب اول - رتبہ اول کی تفرقی مساواتیں
۶	تفرقی مساوات کی تکوین -
۷	متغیر جہائی پذیر
۱۴	خطی مساواتیں
۲۱	باب دوم - رتبہ اول کی تفرقی مساواتیں (سلسل)
۲۶	تجانس مساواتیں
۳۲	ایک حرف غائب
۳۴	کلیروی صورت
۳۷	باب سوم - رتبہ دوم کی مساواتیں، ٹھیک تفرقی مساواتیں
۳۹	خطی مساواتیں
۴۰	ایک حرف غائب
۴۱	خطی مساوات کی عام سے عام صورت، کسی ایک رقم کا
۴۲	نکال دینا -
۴۳	ٹھیک تفرقی مساواتیں

۴۴	باب چہارم - مستقل سروں والی خطی تفرقی مساواتیں
۴۵	متعمم تقابل کی عام صورت
۵۶	خاص تکمیلی
۷۳	ایسی مساوات جو مستقل سروں والی خطی مساوات کی شکل میں تحویل ہو سکتی ہے
۷۶	باب پنجم - قائم مری، متفرق مساواتیں
۸۱	قائم مری
۸۳	علم حرکت کی چند مشہور مساواتیں
۹۲	مزید توضیحی مثالیں
	جوابات

# تفرقی مساواتیں

## باب اول

پہلے رتبہ کی تفرقی مساواتیں  
متغیر حرکی پذیر۔ خلی مساواتیں

۱۔ تکملی احصا کے اختتام پر چند معمولی قسم کی تفرقی مساواتوں کو حل کر نیکی عام طریقوں کا سرسری ذکر کر دینا مقصود ہے، اس طرح کی مساواتیں طالب علم کو تحلیلی سکونیات، ذرہ کے علم حرکت اور استوار اجسام کے علم حرکت (کے ابتدائی حصوں) کے مطالعہ میں کارآمد ہوں گی۔

اس جگہ ہم ان تفرقی مساواتوں کو حل کرنے کی مطلق کوشش نہیں کریں گے جن میں جزوی، تفرقی سر شامل ہوتے ہیں۔

۲۔ تفرقی مساوات کی تکنیک

ذرا سی دیر کے لئے ہم اس موضوع پر غور کریں گے کہ تفرقی مساوات کس طرح پیدا ہوتی ہے اور اس کے ”دخل“ کی نوعیت کیا ہونی چاہئے۔



اس طرح کی مساوات

$$f(a, b, c) = 0 \quad (1)$$

جس میں تفاعل کی شکل معلوم ہے منحنیات کے ایک خاص قبیل کو تعبیر کرتی ہے، اس قبیل کے کسی ایک رکن کے لئے  $a$  کی ایک خاص قیمت ہوگی جو ایک ہی منحنی کے تمام نقاط کے لئے وہی رہتی ہے لیکن اس قبیل کے مختلف منحنیات کے لئے مختلف ہے۔

علم ریاضی میں ایسے سوالات اکثر واقع ہوتے ہیں جن میں منحنیات کے پورے قبیل پر باقی تمام عمل کرنا مقصود ہوتا ہے۔

مثلاً ایک سوال یہ ہے، منحنیات کا ایک ایسا قبیل معلوم کرو جس کا ہر ایک رکن ایک معلوم قبیل کے ہر ایک رکن کو ایک زاویہ معلوم (مثلاً زاویہ قائمہ) پر قطع کرے۔ ظاہر ہے کہ اس طرح کے عملوں میں منحنی کو مخصوص کرنے والا حرف  $a$  تفاعل زیر بحث میں بطور ایک مستقل مقدار کے واقع نہیں ہونا چاہئے ورنہ پورے قبیل پر ایک ہی عمل کرنے کی بجائے ہم اس قبیل کے ایک رکن پر عمل کر رہے ہوں گے۔ اس طرح ساقط ہو سکتا ہے۔

مساوات کو  $a$  کے لئے حل کرو اور اسے شکل ذیل میں لکھو

$$f(a, b, c) = 0 \quad (2)$$

بلحاظ  $a$  کے تفرق کرنے سے  $a$  نکل جاتا ہے اور  $(1)$  کی بجائے ایک مساوات  $a, b, c$  میں حاصل ہوتی ہے۔

یہ ممکن ہے کہ تفرقی مساوات کے بنانے میں  $a$  کے لئے مساوات حل نہ ہو سکے۔ اس صورت میں

$$f(a, b, c) = 0 \quad (1)$$

کا بلحاظ  $a$  کے تفرق کرنے سے حاصل ہوگا

$$f(a, b, c) = 0 \quad (3)$$

اب مساواتوں (۱) اور (۳) سے  $\frac{لا}{لا}$  کو ساقط کرنے سے ایک ربط  
 $لا، ما، م$  میں حاصل ہوتا ہے جو سارے قبیل کے لئے درست ہے۔  
 مثال کے طور پر خطوط مستقیم کے ایک ایسے قبیل پر غور کرو جو مساوات

میں اختیاری مستقل  $م$  کو مختلف قیمتیں دینے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$م \text{ کے لئے حل کرنے سے } \frac{ما}{لا} = م$$

$$\text{تفرق کرنے سے } \frac{لا، ما - ما}{لا} = ۰$$

یا بطرز دیگر  $م$  کے لئے حل کرنے کے بغیر

$$\frac{ما}{لا} = م$$

اس لئے یہ مساوات ان تمام خطوط مستقیم کی تفرقی مساوات ہے جو مبدأ میں  
 سے گذرتے ہیں اور اس کا ہندسی مفہوم یہ ہے کہ مبدأ میں سے  
 گذرنے والے کسی خط مستقیم کی سمت اس کے کسی نقطہ پر وہی ہے  
 جو اس نقطہ اور مبدأ کو ملانے والے سمتی کی ہے۔

۳۔ اب فرض کرو کہ منحنیات کے قبیل کو تعبیر کرنے والی مساوات

$$ف (لا، ما، م) = ۰ \dots \dots \dots (۱)$$

ہے جس میں دو اختیاری مستقل  $لا، م$  ہیں اور قبیل کے مختلف  
 منحنی ان مستقلات کو مختلف قیمتیں دینے سے حاصل ہوتے ہیں۔ لہذا  
 لائے اور پر کی مساوات کا ایک دفعہ تفرق کرنے سے  $لا، ما، م$  اور  $لا، م$   
 میں ایک ربط حاصل ہوگا فرض کرو کہ یہ ربط ہے

$$ف (لا، ما، م) = ۰ \dots \dots \dots (۲)$$

اگر ایک دفعہ اور لمحاظ لا کے اس کا تفرق کیا جائے تو  
لا، ما، ما، ما، لا، ب میں ایک ربط ملے گا، فرض کرو کہ یہ حسب  
ذیل ہے

صہ (لا، ما، ما، ما، لا، ب) = ..... (۳)

ان تین مساواتوں سے لا، ب ساقط ہو سکتے ہیں کم از کم نظری لحاظ  
سے (اگر یہ پہلے سے عمل تفرق میں ساقط نہیں ہو چکے) اس طرح  
لا، ما، ما، ما، لا، ب باہم منسلک کرنے والا ایک ربط مثلاً

ف (لا، ما، ما، ما، لا، ب) = ۰

حاصل ہوگا جو قبیل مفروض کی تفرقی مساوات ہوگی۔

۴۔ مساوات کا رتبہ

تقریب کے طور پر ہم اسے مان لیتے ہیں کہ تفرقی مساوات کا رتبہ  
اس اعلیٰ ترین تفرقی سرے سے متعین ہوتا ہے جو اس میں واقع ہوتا ہے۔  
ہم نے اوپر دیکھا ہے کہ اگر دو مجہولوں کی کسی مساوات میں ایک اختیار کی  
مستقل واقع ہو تو اس مستقل کو ساقط کرنے پر پہلے رتبہ کی تفرقی مساوات  
حاصل ہوتی ہے اور اگر مساوات میں دو اختیاری مستقل واقع ہوں تو انہیں  
ساقط کرنے پر دوسرے رتبہ کی مساوات حاصل ہوتی ہے۔  
یہ استدلال بالکل عام ہے، ان اختیاری مستقلات کو ساقط کرنے کیلئے  
ہمیں ن دفعہ تفرق کرنا ہوگا اور اس طرح لا، ما، ما، ما، لا، ب ..... ملے گا  
باہم ربط دینے والی ایک تفرقی مساوات حاصل ہوگی جس کا رتبہ صیرک  
ن ہوگا۔

مثال ۱۔ مساوات لا، ما = لا، ج سے لا اور ج کو  
ساقط کرو۔

تفرق کرنے سے لا + ما، ما = لا

دوبارہ تفرق کرنے سے لا + ما، ما = ۰

صرف عمل تفرق سے ہی مستقل غائب ہو چکے ہیں، اور یہ دوسرے

رتبہ کی تفرقی مساوات ہے ( واضح ہو کہ بڑے سے بڑا تفرقی مساواتیں  
 نام ہے ) جو ان تمام دائروں سے متعلق ہے جن کے مرکز لا، محور پر  
 واقع ہوتے ہیں۔

مثال ۲۔ اُن تمام مرکز دار مخروطی تراشوں کی تفرقی مساوات معلوم  
 کر دو جن کے محور محدودوں کے محوروں پر منطبق ہوتے ہیں۔  
 مخروطیوں کے اس قبیل کے کسی ایک رکن کی نمونہ کی مساوات ہوگی

$$1 \text{ لا} + 2 \text{ ب} + 3 \text{ ما} = 4$$

تفرق کرنے سے  $1 \text{ لا} + 2 \text{ ب} + 3 \text{ ما} = 4$

دوبارہ تفرق کرنے سے  $1 + 2 \text{ ب} + 3 \text{ ما} = 4$

جس سے  $1 \text{ لا} + 2 \text{ ب} + 3 \text{ ما} = 4$

مطلوبہ تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

۵۔ عمل اسقاط الٹ نہیں سکتا۔

بالعموم اوپر کا عمل اسقاط الٹ نہیں سکتا اور جب ایک قبیل کی  
 تفرقی مساوات دی ہوئی ہو اور ہم اس کے کسی ایک رکن کی نمونہ کی  
 مساوات معلوم کرنا چاہیں تو ہمیں عمل اسقاط کی طرح چند معیاری صورتوں  
 سے کام لے بغیر چارہ نہیں ہوتا اور کئی مساواتیں ایسی پیدا ہوتی ہیں  
 جنہیں ہم مطلق حل نہیں کر سکتے۔

مثلاً ہم اوپر کی دفعات سے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ اگر ن ویں رتبہ  
 کی تفرقی مساوات کو حل کرنا مقصود ہو تو ہمیں لا، ما اور ن اختیاری  
 مستقلات میں ایک ایسا جبریہ ربط معلوم کرنا چاہئے کہ ان مستقلات  
 کو ساقط کرنے پر مفروضہ تفرقی مساوات حاصل ہو سکے۔ ایسا جبریہ  
 ربط مساوات کا عام سے عام حل خیال کیا جاتا ہے۔

## پہلے رتبہ کی تفرقی مساواتیں

۶۔ انکی پانچ معیاری صورتیں ہیں  
صورت اول۔ متغیر جدائی پذیر

وہ تمام مساواتیں جن میں فر لا اور لا والی تمام رتقیں مساوات کے ایک طرف اور فر ما اور ما والی تمام رتقیں دوسری طرف لائی جائیں اس صورت کے تحت میں آتی ہیں اور تکمیل کرنے سے فوراً حل ہو سکتی ہیں

مثال ۱۔ مثلاً اگر  $\text{قط ما} = \text{قط لا}$  فر ما

تو  $\text{جم لا فر لا} = \text{جم ما فر ما}$

تکمیل کرنے سے ربط جب لا = جب ما + ۱  
حاصل ہوتا ہے جس میں ایک اختیاری مستقل لا شامل ہے۔

مثال ۲۔ اگر  $\frac{\text{لا} + ۱}{۱ + ۱} = \frac{\text{لا ما فر ما}}{\text{فر لا}}$

تو  $(\frac{۱}{لا} + ۱) \text{فر لا} = (۱ + ما) \text{فر ما}$

اس لئے  $\frac{لا^۲}{۲} + \text{لوک لا} = \frac{ما^۲}{۲} + ۱$

جس میں ایک اختیاری مستقل لا شامل ہے۔

مثلاً

ذیل کی تفرقی مساواتوں کو حل کرو  
۱۔ لا جم ما فر لا = ما جم لا فر ما

۲۔  $\frac{فرما}{فرلا} = \frac{لا^۲ + لا + ۱}{۱ + ما + ۱} - ۳ - \frac{فرما}{فرلا} + \frac{ما^۲ + ما + ۱}{لا^۲ + لا + ۱} = ۰$   
 ۴۔ ثابت کرو کہ مثال ۳ کے قبیل منحنیات کا ہر ایک رکن مثال ۲ کے ہر رکن کو علی القوائم قطع کرتا ہے۔

۵۔  $لا ما - \frac{فرما}{فرلا} = \frac{ما^۲ + ۱}{لا^۲ + ۱} (۱ + لا + لا^۲)$

۶۔  $\frac{فرما}{فرلا} = \frac{لا - ما}{لا^۲ + لا - ما}$

۷۔ ثابت کرو کہ وہ تمام منحنی جن میں عماد کا مربع سمتی نیم قطر کے مربع کے مساوی ہے یا تو دائرے ہیں یا قائم زائد۔

۸۔ ثابت کرو کہ ایک ایسا منحنی جس کے کسی نقطہ پر کاماس اس نقطہ کے سمتی نیم قطر کے ساتھ مستقل زاویہ (عمہ) بنائے صرف اس جماعت  $R = ۱$  سے متعلق ہو سکتا ہے۔

۹۔ ان منحنیات کی مساواتیں معلوم کرو جن میں

(۱) کارٹیشی زیر ماس مستقل ہو

(۲) کارٹیشی زیر عماد مستقل ہو

(۳) قطبی زیر ماس مستقل ہو

(۴) قطبی زیر عماد مستقل ہو

۱۰۔ اس منحنی کی کارٹیشی مساوات معلوم کرو جس کے ماس کا طول مستقل ہو۔

صورت دوم۔ خطی مساواتیں

حسب ذیل شکل کی مساوات

$ما + ق + ۱ - ق + ۲ - ..... + ک = ۱$

جہاں  $F = Q$ ،  $\dots$ ،  $k$ ،  $r$  متغیر لا کے تفاعل یا مستقل مقدر ہیں  
 ہیں خطی مساوات کہلاتی ہے، اس مساوات کی خصوصیت یہ ہے  
 کہ اس میں تفرقی سروں کی ایک سے بڑی قوت شریک نہیں ہوتی  
 فی الحال چونکہ ہم پہلے رتبہ کی تفرقی مساواتوں پر غور کر رہے  
 ہیں، اس لئے خطی مساوات کی صورت زیر بحث یہ ہوگی

اگر اس کے دونوں جانب  $Q$  کو  $Q$  سے ضرب دیدیا جائے  
 تو مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے

$$\frac{Q}{Q} (Q + Q) = Q + Q$$

$$Q + Q = Q + Q$$

یہ لا،  $Q$  کا باہمی ربط تفرقی مساوات کو پورا کرتا ہے اور اس میں ایک  
 اختیاری مستقل شامل ہوتا ہے۔ اس لئے یہ مطلوبہ حل ہے۔

جزو ضربی  $Q$  کے ساتھ ضرب دینے سے مساوات

کے دائیں جانب کا رکن پورا تفرقی سر ہو جاتا ہے، اس لئے اسے

”شکل جزو ضربی“ کہتے ہیں۔

$$Q + Q = Q + Q$$

شکل جزو ضربی یہاں  $Q$  کو  $Q$  یا  $Q$  ہے اور اس لئے مساوات

اس طرح لکھی جاسکتی ہے

$$\frac{Q}{Q} (Q + Q) = Q + Q$$

$$Q + Q = Q + Q$$

$$\text{یعنی } ۱ + ۱ + ۱ = ۳$$

$$\text{مثال ۲- } \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \frac{۱}{۱} = ۲ \text{ لا کو مکمل کرو۔}$$

اس جگہ شکل جزو ضربی کو  $\frac{۱}{۱}$  فرلا = دو کوک لا = لا ہے اور مساوات

اس طرح لکھی جاسکتی ہے  $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = (۱ + ۱) = ۲$

$$\text{اور لا ما} = \frac{\text{لا}^۲}{۱} + ۱ \text{ یا } ۱ + \frac{\text{لا}^۳}{۱} = ۲$$

۸۔ ایسی مساواتیں جو خطی صورت میں تحویل ہو سکتی ہیں

کئی مساواتیں جو دیکھنے میں خطی شکل

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ن} = \text{ق}$$

کی نہ ہوں متغیروں کو بدلنے سے فوراً اس شکل میں لائی جاسکتی ہیں۔  
ایک مشہور صورت ذیل میں مندرج ہے

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ن} = \text{ق}$$

$$\text{یا } \text{ن} - \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ن} = \text{ق}$$

$$\text{رکھو ما} = \text{ن}$$

$$\text{تو } \text{ن} - \text{فرما} = \text{فری}$$

$$\text{یا } \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + (ن - ۱) = \text{ق} = (ن - ۱)$$



جو ایک خطی مساوات ہے اور اس کا حل یہ ہے  

$$y = (1-n) \text{ کرت فرلا} = (1-n) \text{ کرتی فو} \quad (1-n) \text{ کرت فرلا} \quad (1-n) \text{ کرت فرلا}$$

یعنی  $y = (1-n) \text{ کرت فرلا} = (1-n) \text{ کرتی فو} \quad (1-n) \text{ کرت فرلا} \quad (1-n) \text{ کرت فرلا}$

مثال ۱-  $\frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$  ما کو تکمیل کرو

یہاں  $\frac{1}{y} = \frac{1}{a} - \frac{1}{x}$  یا  $\frac{1}{y} = \frac{1}{a} - \frac{1}{x}$

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{a} - \frac{1}{x}$$

اور چونکہ مشکل جزو ضربی فو  $\frac{1}{y} = \frac{1}{a} - \frac{1}{x}$  تو لوک لا  $\frac{1}{y} = \frac{1}{a} - \frac{1}{x}$

اس لئے  $\frac{1}{y} = \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{x} \right)$  یا  $\frac{1}{y} = \frac{1}{a} - \frac{1}{x}$

یعنی  $\frac{1}{y} = \frac{1}{a} - \frac{1}{x}$  لوک لا  $\frac{1}{y} = \frac{1}{a} - \frac{1}{x}$

یعنی  $\frac{1}{y} = \frac{1}{a} - \frac{1}{x}$  لا لا لوک لا  $\frac{1}{y} = \frac{1}{a} - \frac{1}{x}$

مثال ۲- مساوات  $\frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$  لا جب  $\frac{1}{y} = \frac{1}{a} - \frac{1}{x}$  ما کو تکمیل کرو  
 جم ما پر تقسیم کرنے سے

قط  $\frac{1}{y} = \frac{1}{a} - \frac{1}{x}$  لا لا مس  $\frac{1}{y} = \frac{1}{a} - \frac{1}{x}$

رکھو مس  $\frac{1}{y} = \frac{1}{a} - \frac{1}{x}$

$$\text{تب } \frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} + ۲ \text{ لا می} = \text{لا}^۲$$

مشکل جزو ضروری کو  $\text{لا}^۲ \text{ فرلا}$  ہے اس لئے

$$\text{می فرلا} = \text{فرلا}^۲ \text{ فرلا} + ۱$$

فرض کرو کہ  $\text{لا}^۲ = \text{سہ}$

تب  $۲ \text{ لا فرلا} = \text{فرسہ}$

پس  $\text{فرلا}^۲ \text{ فرلا} = \frac{1}{4} \text{ فرسہ فرسہ}$

$$\frac{1}{4} \text{ فرسہ} = (\text{سہ} - ۱)$$

$$\text{پس مس ما} \times \text{فرلا} = \frac{1}{4} \text{ فرلا}^۲ (\text{لا}^۲ - ۱) + ۱$$

جو مساوات مفروضہ کا حل ہے۔  
ظاہر ہے کہ اس قسم کی مساواتوں کو خطی (یا کسی اور معلومہ) صورت میں لانے کے لئے بڑی فراست اور تیز فہمی کی ضرورت ہوگی۔

## امثلہ

ذیل کی مساواتوں کو تکمیل کرو

$$۱- (۱ + \text{لا}^۲) \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ما} = \text{فرسہ}^۲ - ۲ \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ما} = \text{جب ب لا}$$

$$۳- \frac{\text{فرل}}{\text{فرط}} + \frac{\text{ل}}{\text{ط}} = \text{ا ط ن} - ۴ \frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} + \frac{\text{لا}}{\text{ما}} = \text{ما}^۲$$

$$۵- (۱ + \text{ما}^۲) + (\text{لا} - \text{فرلا}) = \frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} - ۶ \left( \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}} - \frac{\text{ما}}{\text{لا}^۲} \right) \frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} = ۱$$



ہے جہاں کہ ایک معلومہ اور ۱ اختیار می مستقل ہے۔  
۱۸۔ ذیل کی مساواتوں کو تکمیل کرو

$$(۱) \quad \frac{فرما}{فرلا} = \frac{۱}{لا} + \frac{فرما}{فرلا} \quad (۲) \quad \frac{فرما}{فرلا} + ۱ = قو جب بلا$$

$$(۳) \quad \frac{فرما}{فرلا} - \frac{مس ما}{۱ + لا} = قو ق ط ما$$

$$(۴) \quad \frac{فرما}{فرلا} - \frac{قن (دا)}{قن (دا)} = قن (لا) = \frac{قن (لا)}{قن (دا)}$$



# باب دوم

پہلے رتبہ کی مساواتیں (سلسل)  
تجانس مساواتیں - ایک حرف غائب  
کلیدی صورت

۹- صورت سوم - متجانس مساواتیں -  
جو مساواتیں لا، ما میں متجانس ہوں وہ اس طرح لکھی جاسکتی ہیں

$$\text{لا} \left( \frac{\text{لا}}{\text{فر لا}} , \frac{\text{فر لا}}{\text{فر لا}} \right) =$$

(د) اگر ممکن ہو تو اس صورت میں ہم مساوات کو  $\frac{\text{فر لا}}{\text{فر لا}}$  کے لئے  
حل کرنے کی کوشش کرتے ہیں، اس طرح اس شکل کا نتیجہ حاصل ہوگا

$$\frac{\text{فر لا}}{\text{فر لا}} = \text{فہ} \left( \frac{\text{لا}}{\text{فر لا}} \right)$$

اس میں رکھو لا = ما

تو حاصل ہوگا لا + لا  $\frac{\text{فر لا}}{\text{فر لا}} = \text{فہ} (د)$

$$\text{یا} \frac{\text{فر لا}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{فر لا}}{\text{فر لا}}$$

اس طرح متغیر الگ ہو جاتے ہیں اور مساوات کا حل صورت اول کی

تحت طین آجاتا ہے۔

$$\text{پس } \text{لوک لا} = \text{فر} \text{ فہ (د)۔ و}$$

(ب) لیکن اگر  $\frac{\text{فر}}{\text{فہ}}$  کے لئے حل کرنا تکلیف دہ یا ناممکن ہو تو مساوات کو  $\frac{\text{فر}}{\text{فہ}}$  کے لئے حل کرنا چاہئے، اس طرح  $\frac{\text{فر}}{\text{فہ}}$  کے لئے ع رکھنے سے

$$\text{ما} = \text{لا فہ (ع) } \dots \dots \dots (۱)$$

بمطابق لا کے تفرق کرنے سے

$$\text{ع} = \text{فہ (ع) + لا فہ (ع) } \frac{\text{فر}}{\text{فہ لا}}$$

$$\text{یا } \frac{\text{فر لا}}{\text{فہ (ع) - لا (ع)}}$$

اس مساوات کو تکمیل کرنے سے ہم لا کو ع کے تفاعل اور ایک اختیاری مستقل کی رقوم میں بیان کر سکتے ہیں

یعنی  $\text{لا} = \text{فہ (ع) } \dots \dots \dots (۲)$  فرض کرو۔  
ع کو ان مساواتوں (۱) اور (۲) سے ساقط کرنے سے حل مطلوب حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{مثال ۱۔ (لا + ما) } \frac{\text{فر}}{\text{فہ لا}} = \text{لا ما}$$

$$\text{یہاں } \frac{\text{فر}}{\text{فہ لا}} = \frac{\text{فر}}{\text{لا + ما}}$$

اور  $\text{ما} = \text{ولا رکھنے سے}$

$$\text{لا } \frac{\text{فر}}{\text{فہ لا}} = \text{و} + \frac{\text{و}}{\text{لا + و}}$$

$$\text{یا لا} \frac{\text{فر}^3}{\text{فر}^2 + 1} = - \frac{\text{فر}^3}{\text{فر}^2 + 1}$$

$$\text{یا} \frac{\text{فر}^3}{\text{فر}^2} = - \left( \frac{1}{\text{فر}^2} + \frac{1}{\text{فر}^2} \right) \text{فر}^3$$

$$\text{یا} \text{لوک}^2 \text{لا} = \frac{1}{\text{فر}^2} - \text{لوک}^2$$

$$\text{یا} \text{ار}^2 = \frac{1}{\text{فر}^2}$$

مثال ۲ - فرض کرو کہ مساوات یہ ہے

$$\frac{1}{\text{لا}} = \frac{\text{فر}^2}{\text{فر}^2} + \left( \frac{\text{فر}^2}{\text{فر}^2} \right)$$

$$\text{یعنی} \text{ا} = \text{لا} (\text{ع} + \text{ع}^2)$$

$$\text{تب} \text{ع} = (\text{ع} + \text{ع}^2) \text{لا} + (\text{ع}^2 + 1) \frac{\text{فر}^2}{\text{فر}^2}$$

$$\text{یا} \frac{\text{فر}^2}{\text{لا}} + \left( \frac{1}{\text{ع}} + \frac{2}{\text{ع}} \right) \text{فر}^2 = -$$

جس سے حاصل ہوتا ہے  $\text{لوک}^2 \text{لا} + 2 \text{لوک}^2 \text{ع} - \frac{1}{\text{ع}} = 0$   
یعنی  $\text{لا} \text{ع}^2 = \frac{1}{\text{ع}}$

$$\begin{cases} \frac{1}{\text{لا}} = \text{ع} + \text{ع}^2 \\ \text{لا} \text{ع} = \frac{1}{\text{ع}} \end{cases}$$

اور

کاع، حاصل استقاط حل مطلوب ہے۔

$$\text{یہ حال استقاط ہے لوک} \left\{ \frac{\text{لا}}{\text{فر}^2} - 1 \right\} = \left\{ \frac{\text{لا} + 1}{\text{فر}^2} \right\} \pm 1 = \frac{\text{لا}}{\text{فر}^2} \pm 1$$

لیکن اگر جبریہ طریق پر ع کو ساقط کرنا ممکن نہ ہو یا اگر ساقط کرنے پر ایک بے ڈھنگا سا نتیجہ حاصل ہو تو عام طور پر ع، والی ان مساواتوں

کو بغیر تبدلے اسی شکل میں چھوڑ دیتے ہیں، اور انہیں ایسی ہمزاد مساواتیں خیال کرتے ہیں جن کا 'ع' حاصل اسقاط تفرقی مساوات کا حل مطلوب ہے۔

### امثلہ

ذیل کی تفرقی مساواتوں کو حل کرو۔

$$1 - \frac{فرما}{فرلا} = \frac{لا}{لا+ما} \quad 2 - (ما^۲ + لا^۲) = (ما + لا)^۲ \frac{فرما}{فرلا}$$

$$3 - لا^۲ \frac{فرما}{فرلا} = ما^۲ \quad 4 - ما = لا \left[ \left( \frac{فرما}{فرلا} \right)^۲ + \frac{فرما}{فرلا} \right]$$

$$5 - ما = لا \left\{ 1 + \left( \frac{فرما}{فرلا} \right)^۲ + ب \frac{فرما}{فرلا} + ج \right\}$$

۱۰۔ خاص صورت

مساوات  $\frac{فرما}{فرلا} = \frac{لا + ب + ما + ج}{لا + ب + ما + ج}$  آسانی متجانس شکل میں

اس طرح لائی جاسکتی ہے

اس میں رکھو  $\begin{cases} لا = ضا + هه \\ ما = عا + كك \end{cases}$  جہاں ضا، عا متغیر ہیں اور هه، كك مستقل۔

$$تب \frac{فرعا}{فرضا} = \frac{لا + ضا + ب + عا + (لا + هه + ب + كك + ج)}{لا + ضا + ب + عا + (لا + هه + ب + كك + ج)}$$

اب هه، كك کی قیمتیں ایسی منتخب کرو کہ  $\begin{aligned} لا + هه + ب + كك + ج &= 0 \\ لا + هه + ب + كك + ج &= 0 \end{aligned}$

پس  $\frac{ب + ج - هه}{ب + ج - كك} = \frac{كك}{ج - كك} = \frac{1}{ب - كك}$



تب  $\frac{\text{فرعاً}}{\text{فرضاً}} = \frac{\text{ا} + \text{ضا} + \text{ب عا}}{\text{ا} + \text{ضا} + \text{ب عا}}$   
 یہ مساوات متجانس ہے، اس میں ہم رکھ سکتے ہیں  $\text{عا} = \text{رضا اور}$   
 متغیر حسب سابق الگ ہو سکتے ہیں۔  
 ۱۱۔ لیکن ایک صورت میں  $\text{م}$  کی اس طرح منتخب نہیں ہو سکتے

$$\text{یعنی جبکہ } \frac{\text{ا}}{\text{ا}} = \frac{\text{ب}}{\text{ب}} \neq \frac{\text{ج}}{\text{ج}}$$

اس صورت میں فرض کرو کہ  $\frac{\text{ا}}{\text{ا}} = \text{م اور ا لا + ب ما} = \text{عا}$

$$\text{تب } \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{ا}}{\text{ب}} \left( \frac{\text{فرعا}}{\text{فرلا}} - \text{ا} \right)$$

$$\text{پس } \left( \frac{\text{فرعا}}{\text{فرلا}} - \text{ا} \right) \text{ ب} = \frac{\text{عا + ج}}{\text{م عا + ج}}$$

$$\text{یا } \frac{\text{فرعا}}{\text{فرلا}} = \frac{(\text{ا م} + \text{ب عا} + \text{ا ج} + \text{ب ج})}{\text{م عا + ج}}$$

$$\text{اور } \frac{\text{فرلا}}{\text{فرعا}} = \frac{\text{م عا + ج}}{(\text{ا م} + \text{ب عا} + \text{ا ج} + \text{ب ج})}$$

متغیر اب الگ ہو سکتے ہیں اور مساوات کا مکمل حل میں آ سکتا ہے۔  
 ۱۲۔ ایک اور صورت قابل توجہ ہے یعنی

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{ا لا + ب ما + ج}}{\text{ب لا + ب ما + ج}}$$

جہاں شمار کنندہ میں  $\text{ما}$  کا سر نسب نامہ لائے سر کے مساوی  
 اور مختلف ابعلامت ہے۔

اس صورت میں مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے  
 $(\text{ا لا + ج}) / (\text{فرلا + ب ما + فرلا + لا فرما}) = (\text{ب ما + ج}) / \text{فرما}$

جو ایک "ٹھیک یا حاصر" تفرقی مساوات ہے، اس کا تکمیل ہے  
 $۱ لا + ۲ ج + ۲ ب لا + ۲ ب ما = ۲ ج + ۲ ب ما + م$   
 جہاں م اختیاری مستقل ہے۔

مثال ۱۔ تکمیل کرو  $\frac{۲ لا + ۲ ج + ۲ ب ما - ۸ کو}{۳ - ۲ لا + ۲ ج}$

رکھو  $لا = ضا + م$ ،  $ما = عا + ک$

پس  $\frac{۲ ضا + ۳ عا + (۲ م + ۳ ک - ۸ کو)}{۲ ضا + ۳ عا + (م + ک - ۳ کو)}$

م اور ک کی قیمتیں ایسی منتخب کرو کہ

$$\begin{cases} ۲ م + ۳ ک - ۸ کو = ۰ \\ م + ک - ۳ کو = ۰ \end{cases} \text{ یعنی } م = ۱، ک = ۲$$

تب  $\frac{۲ ضا + ۳ عا}{۲ ضا + ۳ عا}$

اب رکھو  $عا = و$ ،  $ضا = تب$

$\frac{۲ تب + ۳ و}{تب + و}$

-  $\frac{۲ تب + ۳ و}{تب + و} = \frac{۲ تب + ۳ و}{تب + و} - ۲ = \frac{۲ تب + ۳ و - ۲ تب - ۲ و}{تب + و}$

-  $\frac{۲ تب + ۳ و}{تب + و} = \frac{۲ تب + ۳ و - ۲ تب - ۲ و}{تب + و} = \frac{و}{تب + و}$

$= \left[ \frac{۱}{۳ - ۲(۱ - و)} + \frac{۱}{۳ - ۱(۱ - و)} \right] \frac{و}{تب + و}$

۱۔ لوک ضا =  $\frac{۱}{۳}$  لوک  $\{ (۱ - و) - ۳ \} = \frac{۱}{۳}$  لوک  $\frac{۱}{۳ - ۱(۱ - و)} + \frac{۱}{۳ - ۲(۱ - و)}$

جہاں ضا = لا - ۱ اور  $\frac{۲ - ۱}{۱ - لا} = و$

مثال ۲- تکمیل کرو  $\frac{لا + ما}{۱ - لا + ما} = \frac{فرما}{فرلا}$  کو  
فرض کرو کہ لا + ما = می، تب

$$\frac{۱ - می}{۱ - می} = \frac{می}{۱ - می} + ۱ = \frac{فرمی}{فرلا}$$

اور فرلا =  $\frac{۱ - می}{۱ - می}$  فرمی =  $\frac{۱}{۲} [۱ - \frac{۱}{۱ - می}]$  فرمی

نہ نہ =  $\frac{۱}{۲} می - \frac{۱}{۲}$  لوک (۱ - می) + ۱  
جہاں می = لا + ما

امثلہ

ذیل کی مساواتوں کو تکمیل کرو۔

$$۱- \frac{فرما}{فرلا} = \frac{لا۲ + ما۳}{ما۲ + لا۳} \quad ۲- \frac{فرما}{فرلا} = \frac{لا۲ + ما۳}{ما۲ + لا۳}$$

$$۳- \frac{فرما}{فرلا} = \frac{لا۲ + ما۳}{ما۲ + لا۳} \quad ۴- \frac{فرما}{فرلا} = \frac{لا۲ + ما۳}{ما۲ + لا۳}$$

$$۵- \frac{فرما}{فرلا} = \frac{لا۲ + ما۳}{ما۲ + لا۳} \quad ۶- \frac{فرما}{فرلا} = \frac{لا۲ + ما۳}{ما۲ + لا۳}$$

$$۷- (لا۲ + ما۳ - ۵) \frac{فرما}{فرلا} + لا۳ + ما۲ - ۵ = ۰$$

$$۸- (لا۲ + ما۳ - ۵) \frac{فرما}{فرلا} + لا۲ + ما۳ - ۱ = ۰$$

۹- ثابت کرو کہ ایک ذرہ لا، ما جو اس طح حرکت کرتا ہے کہ

$$\frac{درت}{درت} = لا + ما + گ$$

$$\frac{و لا}{فرت} = - (ص لا + ب ما + ف)$$

ہمیشہ ایک مخروطی تراش پر واقع ہوتا ہے۔

۱۰۔ ثابت کرو کہ عام متجانس مساوات  $ف ( \frac{ما}{لا} ، \frac{و لا}{فرت} ) = ۰$  کے حل ہمیشہ متشابہ منحنیات کے قبیل کو تعبیر کرتے ہیں۔

۱۱۔ ثابت کرو کہ  $ف ( \frac{ما}{لا} ، \frac{و لا}{فرت} ) = ۰$  کے حل لا، ما اور ایک مستقل کی کسی خاص قوت میں متجانس ہیں۔ برعکس اس کے اگر ایک قبیل منحنیات کے کسی رکن کی نمونہ کی مساوات لا، ما اور ایک مستقل کی کسی خاص قوت کے لحاظ سے متجانس ہو تو اس قبیل کی تفرقی مساوات بھی متجانس ہوگی اور قبیل کے منحنی سب ایک دوسرے کے متشابہ ہوں گے۔

۱۲۔ بتاؤ کہ 'ب' کی مختلف قیمتوں کے لئے منحنیات کے قبائل ذیل میں سے کون کون سے متشابہ جڑوں کو تعبیر کرتے ہیں۔

$$(۱) ما^۲ = ۴ لا \quad (۲) ما = ۱ جمر \frac{لا}{و}$$

$$(۳) \frac{لا}{و} + \frac{ما}{ب} = ۱ \quad (۴) ما = ۲ لا لوک \frac{لا}{و}$$

$$(۵) ب مس = \frac{ما}{لا} = ۱ + ما \quad (۶) لا^۲ + ما^۲ = ۳ لا ما$$

۱۳۔ صورت چہارم۔ ایک حرف غائب

لا غائب

(۱) فرض کرو کہ تفرقی مساوات میں لا موجود نہیں ہے، اس صورت

میں مساوات کی شکل یہ ہوگی

$$ف (ما، \frac{فر}{لا}) = .$$

اسے ہم  $\frac{فر}{لا}$  یا ما کے لئے جیسا مناسب ہو حل کر سکتے ہیں۔

(۱) اگر  $\frac{فر}{لا}$  کے لئے حل کیا جائے تو مساوات کی صورت یہ ہوگی

$$\frac{فر}{لا} = ف (ما)$$

$$تب \quad \frac{فر}{لا} = ف (ما)$$

$$اور شکلی ہے لا = فر \frac{فر}{لا} + ۱$$

(۲) اگر  $\frac{فر}{لا}$  کے لئے حل کرنا تکلیف دہ یا ناممکن ہو تو ہم ما کے لئے حل کر سکتے ہیں، ایسا کرنے سے حاصل ہوگا ما = ف (ع) جہاں ع تفرقی سر  $\frac{فر}{لا}$  کی بجائے لکھا گیا ہے۔

بمطابق لا کے جو مساوات میں موجود نہیں تفرق کرنے سے

$$ع = ف (ع) \frac{فر}{لا}$$

$$یعنی \quad \frac{فر}{لا} = ف (ع) \frac{فر}{لا}$$

$$پس \quad لا = فر \frac{فر}{لا} + ۱$$

تمکمل کا عمل پورا کرنے پر ہم ع کو اس مساوات اور ما = فہ (ع) سے سا قفا کرتے ہیں، اس طرح مساوات مفروضہ کا 'حل حاصل ہوتا ہے۔

۱۴۔ ما غائب

(ب) فرض کرو کہ تفرقی مساوات میں ما موجود نہیں ہے،

اس صورت میں اس کی شکل ہوگی ف (لا،  $\frac{ف}{لا}$ ) = ۰۔

چونکہ  $\frac{ف}{لا} = \frac{۱}{\frac{لا}{ف}}$  اسلئے اوپر کی مساوات اس طرح بھی لکھی

جاسکتی ہے سا (لا،  $\frac{ف}{لا}$ ) = ۰۔

پس اگر ما کو متغیر متبوع مانا جائے تو دفعہ ماقبل کی تشریح کا اطلاق اس پر بھی ہوتا ہے اور وہ اس طرح۔

(۱) بشرط سہولت  $\frac{ف}{لا}$  کے لئے حل کرنے سے اس طرح کا نتیجہ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{ف}{لا} = فہ (لا)$$

$$تب \quad \frac{ف}{لا} = فہ (لا)$$

$$اور مکملی ہے ما = ۱ + \frac{ف}{لا}$$

(۲) لیکن اگر  $\frac{ف}{لا}$  کے لئے حل کرنا تکلیف دہ یا ناممکن ہو تو

لا کے لئے حل کرنے سے ہم اس طرح کا نتیجہ حاصل کرتے ہیں  $\text{لا} = \text{فہ}(\text{ق})$   
 جہاں  $\text{ق}$ ،  $\frac{\text{ق}}{\text{ق}}$  کے لئے لکھا گیا ہے۔ بلحاظ ما کے جو مساوات  
 میں موجود نہیں ہے تفرق کرنے سے

$$\text{ق} = \text{فہ}(\text{ق}) \frac{\text{ق}}{\text{ق}}$$

$$\text{اس طرح مرما} = \frac{\text{فہ}(\text{ق})}{\text{ق}} \text{ فرق}$$

$$\text{اور ما} = \frac{\text{ق}(\text{ق})}{\text{ق}} \text{ فرق} + ۱$$

تکمیل کا عمل پورا کرنے پر ہمیں  $\text{ق}$  کو اس مساوات اور  $\text{لا} = \text{فہ}(\text{ق})$   
 سے ساقط کرنا چاہئے، اس طرح تفرقی مساوات کا حل مطلوب  
 حاصل ہوگا۔

طالب علم دیکھے کہ دونوں صورتوں میں خواہ  $\text{لا}$  موجود نہ ہو  
 یا  $\text{ما}$ ، ہم حتی الامکان سب سے پہلے  $\frac{\text{ق}}{\text{ق}}$  کے لئے حل کرنے کی  
 کوشش کرتے ہیں، لیکن اگر یہ عمل تکلیف دہ یا ناممکن ہو تو باقی  
 ماندہ حرف کے لئے حل کرنے کے بعد ہم اُس حرف کے لحاظ  
 سے جو مساوات میں موجود نہ ہو تفرق کرتے ہیں، پس  
 ہر صورت میں جو حرف مساوات میں موجود نہیں ہوتا اُسے  
 متغیر متبوع خیال کیا جاتا ہے۔

$$\text{مثال ۱۔ مساوات ۱ + لا}^۲ - \text{لا} \frac{\text{ق}}{\text{ق}} = ۰ \text{ کو تکمیل کرو}$$

$$\text{اسجگہ } \frac{\text{ق}}{\text{ق}} = \frac{\text{لا}}{۱ + \text{لا}} \text{ یعنی مرما} = (\text{لا} + \frac{۱}{\text{لا}}) \frac{\text{ق}}{\text{ق}}$$

اور  $ما = \frac{لا^2}{۲} + لوک لا + ۱$  حل مطلوب ہے

مثال ۲۔ حل کرو  $لا \frac{فرما}{فرلا} = ۱ + \left(\frac{فرما}{فرلا}\right)^2$  کو۔

مساوات اس طرح لکھی جا سکتی ہے

$$لا = ق + \frac{۱}{ق} \quad \text{جہاں } ق = \frac{فرما}{فرلا}$$

یہاں مساوات میں ما موجود نہیں ہے۔ اس کے بجائے تفرق کرتے سے

$$ق = (۱ - \frac{۱}{ق}) \frac{فرق}{فرما}$$

$$\text{یا } \frac{فرق}{فرما} = \frac{۱}{ق} - \frac{۱}{ق^2}$$

$$\text{اور } ما = لوک ق + \frac{۱}{ق^2} + ۱$$

اس مساوات اور مساوات  $لا = ق + \frac{۱}{ق}$  کا ق، حاصل استقار حل مطلوب ہے۔

مثلاً ✓

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو

$$۱ - \frac{فرما}{فرلا} = ما + \frac{۱}{ما} \quad ۲ - \frac{فرما}{فرلا} = لا + \frac{۱}{لا}$$

$$۳ - \sqrt{۱ + لا} = \frac{فرما}{فرلا} + لا$$

$$۴ - (۲ لا + لا^2) = \frac{فرما}{فرلا} = ۵ + ۲ لا$$



$$6.92 + 1 = \frac{7.6}{7.6} (7.6 + 6.92) - 5$$

$$١ - ٢ = \text{جب} \left( \frac{\text{ربا}}{\text{رلا}} \right) - \frac{\text{ربا}}{\text{رلا}} \text{جم} \left( \frac{\text{ربا}}{\text{رلا}} \right)$$

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

۸- لا  $\left(\frac{\text{فرأى}}{\text{فرأى}}\right)^3 = 1 + \text{ب فرأى}$

۱۵- صورت پنجم- کلیدی صورت  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$  ف  $(\frac{1}{2})$

مرزا کے لئے عکسے سے

ما = ع لا + ف (ع) ..... (۱)

$$ع = ع + لا \frac{ع}{لا} + ف (ع) \frac{ع}{لا}$$

$$(۲) \dots\dots\dots = \frac{\text{مربع}}{\text{مولا}} \{ (ع) + ف \}$$

جس سے  $\frac{ورع}{ملا} =$  یا لا + ف (ع) = .

اب  $\frac{\text{فرع}}{\text{دولا}} =$  سے حاصل ہوتا ہے  $\text{ع} = \text{ج جہاں ج مستقل}$

پس  $ج + لا + ف = ج$  (ج) تفرقی مساوات کا ایک حل ہے جہاں ج مستقل ہے۔

نیز اگر ع کو مساوات

لا + ف (ع) = ..... (۳)  
 سے لا کی رقوم میں معلوم کیا جائے تو ع ، لا کا ایک تفاعل ہوگا  
 اور اگر ع کی یہ قیمت مساوات (۱) میں مندرج کی جائے اور جو  
 ایک ہی بات ہے کہ ع کو مساواتوں (۱) اور (۳) سے ساقط کیا  
 جائے تو ہمیں لا ، ما میں ایک ربط حاصل ہوگا اور یہ بھی تفرقی  
 مساوات کو پورا کرے گا۔  
 اب ع کو مساواتوں

$$ما = ع لا + ف (ع)$$

$$= لا + ف (ع)$$

سے ساقط کرنا وہی بات ہے کہ ج کو مساواتوں

$$ما = ج لا + ف (ج)$$

$$= لا + ف (ج)$$

سے ساقط کیا جائے یعنی ج کی مختلف قیمتوں کے لئے خط

$$ما = ج لا + ف (ج) \text{ کا لفاظ معلوم کیا جائے۔}$$

اس لئے مساوات مفروضہ کے حل دو طرح کے ہیں۔

(۱) خطی حل جسے ”کامل ابتدائی“ کہتے ہیں اور جس میں ایک اختیاری  
 مستقل شامل ہوتا ہے۔

(۲) لفاظ یا ”نادر حل“ جس میں کوئی اختیاری مستقل شامل

نہیں ہوتا اور نیز یہ حل کامل ابتدائی سے اختیاری مستقل کی جگہ  
 کوئی خاص عددی قیمت مندرج کرنے سے حاصل نہیں ہو سکتا۔

ان حلوں کے درمیان ہندسی ربط یہ ہے کہ کامل ابتدائی

خطوط کے ایک قبیل کو تعبیر کرتا ہے اور نادر حل ان کے

لفاف کو۔ نادر حلوں کی بحث اس کتاب کی حدود سے باہر

ہے اور مزید معلومات کے لئے طالب علم بڑے رسالوں کا مطالعہ

کرے۔

مثال - حل کرو  $ما = ع لا + \frac{1}{ع}$

کلیروی قاعدہ کی رو سے کامل ابتدائی ہے

$$ما = م لا + \frac{1}{م}$$

لغات یا تادر حل اوپر کی مساوات اور

$$لا = \frac{1}{م} - \frac{1}{م}$$

کے درمیان م کو ساقط کرنے سے حاصل ہوگا۔

تادر حل ہے  $ما = م لا$

طالب علم فوراً پہچان لیگا کہ تادر حل  $ما = م لا$

مکانی کی مساوات ہے اور کامل ابتدائی  $ما = م لا + \frac{1}{م}$

مکانی کے ماس کی مساوات ہے۔

امثلہ

ذیل کی ہر ایک صورت میں کامل ابتدائی اور لغاتی حل معلوم کرو

$$۱- ما = ع لا + ع^۲ \quad ۲- ما = ع لا + ع^۳$$

$$۳- ما = ع لا + ع^۴ \quad ۴- ما = ع لا + ع^۵$$

$$۵- ما = (لا - ع) ع - ع^۲ \quad ۶- (ما - ع لا) (ع - ۱) = ع$$

$$۷- مساوات ما = لافہ (ع) + سا (ع) \dots (۱)$$

بھی پہلے بلحاظ لا کے تفرق کرنے پھر ع کو متغیر متبوع خیال

کرنے سے حل ہو سکتی ہے۔

تفرق کرنے سے

$$ع = فہ (ع) + لافہ (ع) + ساد (ع) + مرع$$

$$\text{جس سے } \frac{مرع}{ع} + لا = \frac{فہ (ع)}{فہ (ع) - ع} = \frac{ساد (ع)}{فہ (ع) - ع}$$

جو ایک خطی مساوات ہے اور اس کا حل یہ ہے

$$لا \text{ کو } \frac{فہ (ع)}{فہ (ع) - ع} = \frac{ساد (ع)}{فہ (ع) - ع} \text{ کی شکل } \frac{فہ (ع)}{فہ (ع) - ع} + ع = 1$$

(۲).....

اب اگر مساواتوں (۱) اور (۲) سے ع کو ساقط کیا جائے تو اصلی مساوات کا کامل ابتدائی حاصل ہوگا۔

مثال حل کرو  $۲ع + لا = ۳$  ..... (۱)

$$\text{تفرق کرنے سے } ع = ۲ + لا \text{ مرع} + ع ۲ \text{ مرع}$$

$$\text{یا } ع = ۲ + لا - ع ۲$$

$$\text{یعنی } \frac{مرع}{ع} (ع + لا) = ۲ - ع ۲$$

جس سے حاصل ہوتا ہے  $ع + لا = \frac{۲}{۲ - ع ۲}$  ..... (۲)  
 ان مساواتوں کا ع، حاصل اسقاط اس طرح حاصل ہو سکتا ہے۔ پہلے ع کے لئے مساوات (۱) کو حل کر پھر (۲) میں مندرج کرو۔ لیکن اگر نتیجہ کو منطق صورت میں پیش کرنا مطلوب ہو تو اس طرح عملی کرو

$$\text{مساوات (۲) سے } ۲ع + لا = ۳$$

$$(۱) \text{ سے } ع + ۲ع + لا = ۳$$

$$\text{اس لئے } ع + لا = ۳$$

اس مساوات اور  $ع + ۲ع + لا = ۳$  سے چلیپی ضرب کے

ذریعہ

$$\frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{6}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{6}{\frac{5}{6}} = \frac{36}{5}$$

جس سے حاصل اسقاط ہے  $3(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) = (\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) = (\frac{1}{2} + \frac{1}{3})$   
 ۱۔ ع کو ساقط کرنے کا جبریہ عمل کئی صورتوں میں مشکل یا ناممکن ہوتا ہے، ایسی صورتوں میں اسقاط کا عمل فی الحقیقت نہیں کیا جاتا لیکن مساواتوں (۱) اور (۲) کو ایسی ہمنژاد مساواتیں خیال کیا جاتا ہے جن کا ع، حاصل اسقاط مساوات زیر بحث کا حل مطلوب ہوتا ہے

### امثلہ

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو

$$\begin{aligned} 1 - 2 &= 6 - 2 & 1 - 2 &= 6 - 2 \\ 1 - 3 &= 6 - 3 & 1 - 3 &= 6 - 3 \\ 1 - 4 &= 6 - 4 & 1 - 4 &= 6 - 4 \\ 1 - 5 &= 6 - 5 & 1 - 5 &= 6 - 5 \\ 1 - 6 &= 6 - 6 & 1 - 6 &= 6 - 6 \end{aligned}$$

۸۔ ایک منحنی کے نقطہ ن پر کاماس محور و ماس سے ت پر ملتا ہے اور و ت اس زاویہ میلان کے ماس کے متناسب ہے جو ن ت کا و لا کے ساتھ ہے، منحنی کو معلوم کرو۔ [آکسفورڈ سسٹم]  
 ۹۔ جو منحنی یہ خاصیت رکھتے ہیں کہ حوالہ کے محوروں پر ان کے ماسوں کے مقطوعوں کا مجموعہ مستقل ہوتا ہے ان کی تفرقی مساوات معلوم کرو۔

کامل ابتدائی معلوم کرنے سے ماس کی مساوات اور نادر حل منحنیات زیر بحث کی مساوات معلوم کرو۔

۱۰۔ وہ منحنی معلوم کرو جن کی صورت میں اس مثلث کا رقبہ جو حماس اور حوالہ کے محوروں کے درمیان بنتا ہے مستقل ہو۔

۱۱۔ جن منحنیات میں حماس کے اس حصہ کا طول جو حوالہ کے محوروں کے درمیان کٹتا ہے مستقل ہو ان کی تفرقی مساوات معلوم کرو، کامل ابتدائی اور نادر مل کو حاصل کرو اور ہر ایک کی ہندسی تعبیر بتاؤ۔

۱۲۔ ایک منحنی تفرقی مساوات  $ما = ع' (لا - ع)$  کو پورا کرتا ہے، نیز اگر  $لا = \frac{1}{2} ع$  تو  $ع =$  ما منحنی کی مساوات معلوم کرو [آکسفورڈ ۱۸۸۹ء]

۱۳۔ مساوات ذیل کا کامل ابتدائی اور نادر مل معلوم کرو

$$قولا (ما - \frac{قولا}{قولا}) = ج \{ (قولا + \frac{قولا}{قولا}) \} \quad [آکسفورڈ ۱۸۹۰ء]$$

۱۴۔ ثابت کرو کہ اگر  $لا = س$  اور  $ما = ت$  تو مساوات ذیل

$$ولا ما ما + (لا - لا) (ب - ب) - لا ما = .$$

کلیروی شکل میں تحویل ہو سکتی ہے۔

اس طرح سے اس کا کامل ابتدائی اور نادر مل معلوم کرو۔ نتیجہ کی تعبیر بیان کرو۔



# باب سوم

## دوسرے رتبہ کی تفرقی مساواتیں

### ٹھیک یا حاضر تفرقی مساواتیں

۱۸۔ دوسرے رتبہ کی مساوات  
اب ہم دوسرے رتبہ کی تفرقی مساوات پر بحث کریں گے  
فہ (لا، ما، ما، ما، ما) =

اس کے حل کرنے کا کوئی عام طریقہ نہیں ہے، مگر اس کی خاص صورتوں کا  
حل کرنا چنداں مشکل نہیں۔

۱۹۔ صورت اول فرض کرو کہ یہ خطی مساوات ہے

اسکی نمونہ کی صورت ہوگی  $\frac{2}{3}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{5}z = 1$

جہاں  $x$ ،  $y$ ،  $z$  متغیر لا کے تفاعل ہیں۔  
اس مساوات کو حل کرنے کی تدبیر یہ ہے کہ پہلے  $z$  کو حذف کر کے مساوات

$$\frac{2}{3}x + \frac{1}{4}y = 1 - \frac{1}{5}z$$

کا کوئی حل معلوم کیا جائے یا ویسے ہی جواب لیا جائے۔  
فرض کرو کہ  $z = 1$  (لا) اس کا یکساں حل ہے، اصلی مساوات میں رکھو  
 $z = 1$  ہی فہ (لا)

$$z = 1 \text{ ہی فہ (لا) } + \text{ ہی فہ (لا)}$$

$$M = M_1 F_1 (L_1) + M_2 F_2 (L_2) + M_3 F_3 (L_3)$$

ان قیمتوں کو مندرج کرنے سے

$$M_1 F_1 (L_1) + M_2 F_2 (L_2) + M_3 F_3 (L_3)$$

$$+ M_4 F_4 (L_4) + M_5 F_5 (L_5)$$

$$+ M_6 F_6 (L_6) = R$$

$$\text{لیکن } F_1 (L_1) + F_2 (L_2) + F_3 (L_3) + F_4 (L_4) + F_5 (L_5) + F_6 (L_6) = R \text{ حسب مفروض}$$

$$\text{اس لئے } M_1 \left\{ F_1 (L_1) + F_2 (L_2) + F_3 (L_3) + F_4 (L_4) + F_5 (L_5) + F_6 (L_6) \right\} = R$$

جو  $M_1$  کے لئے خطی مساوات ہے  
تکمیل جزو ضربی ہے

$$M_1 \left\{ F_1 (L_1) + F_2 (L_2) + F_3 (L_3) + F_4 (L_4) + F_5 (L_5) + F_6 (L_6) \right\} = R$$

اور پہلا تکمیلی ہے

$$M_1 \left\{ F_1 (L_1) + F_2 (L_2) + F_3 (L_3) + F_4 (L_4) + F_5 (L_5) + F_6 (L_6) \right\} = R$$

جس سے دوسرا تکمیلی اور اس لئے تفرقی مساوات کامل حاصل ہو سکتا ہے

$$\text{مثال - اس مساوات کو حل کرو } \frac{M_1}{L_1} + \frac{M_2}{L_2} + \frac{M_3}{L_3} - \frac{M_4}{L_4} = \frac{R}{L_5}$$

$$\text{یہاں } M_1 = L_1 \text{ مساوات } \frac{M_1}{L_1} + \frac{M_2}{L_2} + \frac{M_3}{L_3} - \frac{M_4}{L_4} = \frac{R}{L_5} \text{ کا ایک حل ہے}$$

$$\text{اس لئے رکھو } M_1 = L_1$$

$$\text{تب } M_1 = L_1 + M_2$$

اور

$$M_1 = L_1 + M_2$$

$$\text{اس لئے } L_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5 + M_6 = R \text{ (لائی) } = L_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5 + M_6$$



$$م + \left(\frac{2}{3} + لا^3\right) م = لا^4 - نو^{\frac{2}{3}}$$

اور مکمل جزو ضربی ہے نوک  $\left(\frac{2}{3} + لا^3\right) ملا$  یا  $لا^4 نو^{\frac{2}{3}}$

$$\text{پس } \frac{م}{ملا} (م لا نو^{\frac{2}{3}}) = لا^4$$

$$\text{اور } م لا نو^{\frac{2}{3}} = \frac{لا^5}{5} + 1$$

$$\text{یعنی } م = \frac{1}{5} لا^5 - نو^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{لا} نو^{\frac{2}{3}}$$

$$\text{جس سے } م = \frac{1}{5} - نو^{\frac{2}{3}} + 1 لا نو^{\frac{2}{3}} - نو^{\frac{2}{3}} ملا + ب$$

اور حل مطلوب ہے ما =  $\frac{لا}{5} - نو^{\frac{2}{3}} + 1 لا نو^{\frac{2}{3}}$  - نو^{\frac{2}{3}} ملا + ب لا

۲۰۔ صورت دوم۔ ایک حرف غائب

(ا) اگر مساوات میں لا موجود نہ ہو تو فرض کر دو کہ ما = ع

$$\text{تب } ما = \frac{مرع}{ملا} = ع \frac{مرع}{مرما}$$

اس طرح مساوات فہ (ما، ما، ما) = ہو جاتی ہے

$$\text{فہ (ما، ع، ع) } \frac{مرع}{مرما} =$$

اور پہلے رتبہ کی مساوات ہے۔

(ب) اگر ما موجود نہ ہو تو فرض کر دو کہ ما = ع

$$\text{تب } \frac{\text{فرع}}{\text{فر لا}} = \text{ما}$$

اور فہ (لا، ما، لم) = ہو جاتی ہے

$$\text{فہ (لا، ع، فرع)} = \frac{\text{فرع}}{\text{فر لا}} =$$

اور یہ پہلے رتیبہ کی مساوات ہے۔

مثال ۱۔ مساوات ما، لم + ما = ۲ ما کو حل کرو۔

یہاں مساوات میں لا موجود نہیں ہے پس رکھو ما = ع اور لم = ع فرع

$$\text{اس طرح } \text{ما} = \frac{\text{فرع}}{\text{فر لا}} + \text{ع} = ۲ \text{ ما}$$

$$\text{یا } \frac{\text{فرع}}{\text{فر لا}} + \frac{۲}{۱} \text{ع} = ۲ \text{ ما}$$

شکل جزو ضربی ہے نو کہ  $\frac{۲}{۱} \text{ع} = ۲ \text{ ما}$

$$\text{اس لئے } \frac{\text{فرع}}{\text{فر لا}} = (۲ \text{ ما}) = ۲ \text{ ما}$$

$$\text{یا } \text{ع} = ۲ \text{ ما} = \text{ما} + \text{مستقل} = \text{ما} + ۲ \text{ (فرض کرد)}$$

$$\text{اس لئے } \frac{\text{ما فر لا}}{\text{ما} + ۲} = \text{فر لا}$$

$$یا \quad جنر - ۱ = \frac{۲}{۱} = ۲ + ۰$$

$$یعنی \quad ۱ = ۲ + ۰ \quad جنر (۲ + ۰)$$

مثال ۲۔ حل کرو  $۱ + ۲ = ۳ = ۳ + ۰$  کو  
یہاں مساوات میں ما موجود نہیں ہے، پس رکھو  $۳ = ۳$

$$اس طرح \quad ۱ + ۲ = ۳ = ۳ + ۰$$

$$یا \quad \frac{۳}{۱} = \frac{۳}{۱}$$

$$یعنی لوک لا = لوک \sqrt{۱ + ۲} + مستقل$$

$$۱ + ۲ = \frac{۳}{۱} \quad (فرض کرو)$$

$$یا \quad ۱ + ۲ = \sqrt{۱ + ۲} \quad ۳$$

$$جس سے حاصل ہوتا ہے  $۱ + ۲ = \frac{۳}{۲} = \frac{۳}{۲} - \frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۲} - \frac{۱}{۲}$$$

جہاں ۱ اور ۲ اختیاری مستقل ہیں۔

اشک

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

$$۱ - ۲ = ۳ + ۱ = ۴$$

$$۱ - لا ۳ = ۱$$

$$۳ - ۴ = ۳ + ۱ = ۴$$

$$۳ - ۱ + ۲ = ۳$$

$$۴ - ۵ = ۳ + ۲ + ۱ = ۶$$

$$۵ - ۱ = ۳ + (۲ + ۱)$$



$$+ \text{ف د ی} + \dots + \text{ف د ی} + \text{ی}$$

$$+ \text{ف د ی} = \text{ق}$$

ی۔ کاسر ن د + ف د ہے۔

اگر د کو اس طرح منتخب کیا جائے کہ

$$\frac{\text{ف د ر لا}}{\text{د}} = \frac{\text{ف د ر لا}}{\text{ن}} \text{ یا } \text{د} = \frac{\text{ف د ر لا}}{\text{ن}}$$

تو جس رقم میں ی واقع ہوتا ہے وہ خارج ہو جاتی ہے  
اسی طرح اگر د کو اس طرح منتخب کیا جائے کہ تفرقی مساوات

$$\frac{\text{ن} (1 - \text{ن})}{2 \times 1} + \text{د} + (1 - \text{ن}) \text{ ف د} + \text{ف د} = 0$$

پوری ہو تو وہ رقم جس میں ی واقع ہوتا ہے خارج ہو جاتی ہے۔  
ی کاسر ہے

$$\text{د} + \text{ف د} + \text{ف د} + \text{ف د} + \dots + \text{ف د} + \text{ف د}$$

اگر د کی ایک قیمت معلوم ہو سکے یا دیے ہی بجانب لی جا سکے  
جو اوپر کے جملہ کو صفر بنا دے تو ی = عا اور اس لئے ی = عا  
اور ی = عا رکھنے سے مساوات کا درجہ بقدر ایک کے

کم ہو سکتا ہے۔ طالب علم دیکھے کہ یہ جملہ شکل میں وہی ہے جو مساوات  
معلومہ کے دائیں جانب کا رکن ہے۔

اس لئے اگر مساوات کا کوئی مل ما = د کسی طرح سے معلوم ہو سکے  
جبکہ اس کا بائیں رکن حذف کیا جائے تو ما = د ہی رکھنے سے اور  
پھر ی = عا فرض کرنے سے ہم مساوات کا ایک رتبہ کم کر سکتے ہیں

## ۲۲۔ صورت آئینی

جیسا اوپر بیان ہوا درجہ دوم کی مساوات

$$م + ف + م + ف + م = ق$$

میں  $م = نو$  -  $\frac{1}{4}$  ک ف حرا ہی مندرج کرنے سے اصلی مساوات

بعض اوقات سادہ صورت

$$م + ف + م = ق$$

میں تبدیل ہو سکتی ہے۔

لیکن اس مساوات کا عام حل ابھی تک نہیں حاصل کیا گیا۔

## ”ٹھیک“ یا حاضر تفرقی مساوات

$$۲۳۔ اگر  $ق > نو$  -  $\frac{1}{4}$  ک ف حرا - کامل تفرقی ہے$$

اور ما خواہ کچھ ہی ہو یہ مکمل ہو سکتا ہے

کیونکہ اگر  $ق > نو$  -  $\frac{1}{4}$  ک ف حرا کو مانی سے تغیر کیا جائے تو

$$ک لا م ف حرا = لا م ف حرا - ن ک لا م ف حرا$$

$$ک لا م ف حرا = لا م ف حرا - (ن - ۱) ک لا م ف حرا$$

وغیرہ

$$ک لا م ف حرا = لا م ف حرا - ن ک لا م ف حرا - (ن - ۱) ک لا م ف حرا$$

$$اس طرح  $ک لا م ف حرا = لا م ف حرا - (ن - ۱) ک لا م ف حرا - (ن - ۲) ک لا م ف حرا - \dots$$$

..... + (-۱) <sup>ن</sup> لک ملتی - ۱۔

ظاہر ہے کہ جب  $ق = ن$  یا  $ن > ق$  تو تکمیل عمل میں نہیں آسکتا۔  
 ۲۴۔ اوپر کے مسئلہ ابتدائی یا تہید یہ کی مدد سے ہم اکثر جلدی دیکھ  
 سکتے ہیں کہ مساوات معلومہ حاضر مساوت ہے یا نہیں۔ کیونکہ اگر سب سے  
 پہلے تمام رقمیں اس شکل (لا<sup>ن</sup> ملتی) کی جن میں  $ن > ق$  الگ کر لی جائیں  
 تو اکثر اوقات فقط دیکھنے ہی سے ہم فوراً بتا سکتے ہیں کہ باقی ماندہ ارتقام کامل  
 تفرقی سر نہاتی ہیں یا نہیں۔

مثال لا<sup>۱</sup>م + لا<sup>۲</sup>م + لا<sup>۳</sup>م + لا<sup>۴</sup>م = م جب لا

اس جگہ تہید یہ کی بنا پر لا<sup>۱</sup>م اور لا<sup>۳</sup>م کامل تفرقی سر ہیں اور ظاہر  
 ہے کہ لا<sup>۲</sup>م + لا<sup>۴</sup>م بھی لا<sup>۱</sup>م کا کامل تفرقی سر ہے، اس لئے اس مساوات کا  
 پہلا تفرقی حسب ذیل ہے۔

لا<sup>۱</sup>م - لا<sup>۲</sup>م + لا<sup>۳</sup>م + لا<sup>۴</sup>م - لا<sup>۵</sup>م + لا<sup>۶</sup>م - لا<sup>۷</sup>م + لا<sup>۸</sup>م - ... = جم لا + ۱

۲۵۔ جانچ کا زیادہ عام طریقہ  
 حاضر تفرقی مساوات کو پرکھنے کا عام طریقہ حسب ذیل ہے جبکہ مساوات  
 عام صورت

ف<sup>۱</sup>م + ف<sup>۲</sup>م + ف<sup>۳</sup>م + ..... + ف<sup>ن</sup>م = و  
 میں دی گئی ہو جہاں ف<sup>۱</sup>م، ف<sup>۲</sup>م، ف<sup>۳</sup>م، ..... ف<sup>ن</sup>م کسی شکل کے لا کے  
 تفاعل ہیں۔  
 اگر تفرقیوں کو زبروں سے تعبیر کیا جائے تو تکمیل بالخصص سے

ف<sup>۱</sup>م ف<sup>۲</sup>م ف<sup>۳</sup>م ..... ف<sup>ن</sup>م =

کف-۱۰۱ = کف-۱۰۲

ف<sub>۲-۵</sub> با ف<sub>۲-۵</sub> = ف<sub>۲-۵</sub> - با - ف<sub>۲-۵</sub> + ف<sub>۲-۵</sub> با ف<sub>۲-۵</sub>

[illegible]

و غیره و غیره

اس لئے جمع کرنے پر ظاہر ہے کہ اگر

$$f = f_1 + f_2 + f_3 + \dots$$

تو مساوات مفروضہ حاضر مساوات ہے اور اس کا پہلا تفرقی ہے

$$(f - f_{-1} + f_{-2} - \dots + f_{-p}) + (f - f_{-2} + f_{-3} - \dots + f_{-p-1})$$

$$+ (\text{ف}_3 - \dots) + \dots = f \text{ و فرلا } + 1$$

مثال کیا مسادات لایم + ۱۲ لایم + ۳۶ لایم + ۲۴ لایم = جب لا حاضر مسادات ہے ؟

حاضر مساوات کو جانچنے کے طریقہ کے موافق ہم دیکھتے ہیں کہ

ف = لا<sup>۱</sup> لا<sup>۲</sup> ف = لا<sup>۳</sup> لا<sup>۴</sup> ف = لا<sup>۵</sup> لا<sup>۶</sup> ف = لا<sup>۷</sup> لا<sup>۸</sup> ف = لا<sup>۹</sup> لا<sup>۱۰</sup>

اور  $\text{ف} - \text{ف} + \text{ف} - \text{ف} = 2\text{ف} - 2\text{ف} = 0$

معلوم ہوا کہ یہ حاضر مساوات ہے اور اس کا پہلا تکمیل ہے

$$A + B = \frac{1}{6}(-\lambda^2 - 1) + \frac{1}{6}(1 - \lambda^2) + \frac{1}{6}(\lambda^2 + 1)$$

یا  $۱۲\alpha + ۸\alpha^۲ + ۱\alpha^۳ = -۳\beta + ۱$



دایاں رکن کامل تفرقی سر ہوگا اگر

$$۱۲ لا^۲ - ۲۲ لا^۲ + ۱۲ لا^۲ = ۰$$

شرط پوری ہوتی ہے، پس دوسرا تکلی ہے

$$(۸ لا^۳ - ۳ لا^۲) + ما + لا^۲ ما = - جب لا + لا + ب$$

یا  
جسے پھر جانچنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ دایاں رکن کامل تفرقی سر ہے، پس  
تیسرا تکلی ہے

$$لا^۲ ما = جم لا + \frac{لا^۲}{۲} + ب لا + ج$$

مثلاً

۱- ثابت کرو کہ لا^۴ + لا^۳ ما + لا^۲ ما + لا ما + لا^۲ ما = ۰ حاضر مساوات  
ہے، اسے پورے طور پر حل کرو۔

۲- مساوات ذیل کو حل کرو

$$لا^۴ ما + لا^۳ ما + لا^۲ ما + لا ما + جب لا (ما - ۳) + جم لا (۳ ما - ما) = جب لا$$

۳- ذیل کی مساواتوں کے پہلے تکلی معلوم کرو۔

$$(ا) لا^۳ ما + لا ما + ما = ۰$$

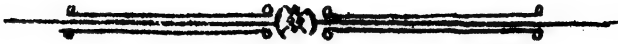
$$(ب) لا^۳ ما + لا ما - ما = ۰$$

$$(ج) لا^۴ ما + لا^۳ ما + لا ما + لا = ۰$$

۴- اگر مساوات ۳ + ۴ + ۵ + ۶ = ۰ کا ایک شکل جزو ضربی

مہ ہو تو ثابت کرو کہ مہ ذیل کی تفرقی مساوات کو پورا کرتا ہے

$$ف_1 مہ - م_1 مہ = \frac{ف_2}{م_2} + (ف_1 مہ) =$$



# باب چہارم

## مستقل سہروں الی خطی، تفرقی مساواتیں

### ۲۶۔ عام خطی تفرقی مساوات

ن، دین رتبہ کی عام خطی تفرقی مساوات کی شکل ہے

$$\frac{د_۱-۱}{۱-۱} + ف_۱ + \frac{د_۲-۲}{۲-۱} + ف_۲ + ..... + \frac{د_۵-۵}{۵-۱} + ف_۵ = م = د_۵ \dots (۱)$$

جہاں ف، ف، ف، ف، ف، ..... ف اور د، د کے معلوم تفاعل ہیں۔  
فرض کرو کہ مساوات کا کوئی خاص حل  $م = ف (د)$  ایسے ہی بھانپ  
لیا گیا ہے یا کسی طرح سے معلوم کر لیا گیا ہے۔

تب اگر  $م = ف (د)$  + سی مساوات میں مندرج کیا جائے تو حاصل

$$\frac{د_۱-۱}{۱-۱} + ف_۱ + \frac{د_۲-۲}{۲-۱} + ف_۲ + ..... + \frac{د_۵-۵}{۵-۱} + ف_۵ = ف_۵ \dots (۲)$$

فرض کرو کہ سی = سی، سی = سی، ..... سی = سی اس مساوات کے حل ہیں

تب ظاہر ہے کہ سی = سی + سی + سی + سی + ..... + سی

بھی مساوات (۲) کا حل ہے اور اس میں ن مستقل سی، سی، سی، ..... سی

شامل ہیں۔

اسلئے  $م = سی + سی + سی + سی + ..... + سی + ف (د)$

مساوات کا ایک ایسا حل ہے جس میں ن مستقل شامل ہیں اور اس لئے

یہ مساوات کا عام سے عام حل ہے، مساوات کا اس سے زیادہ عام حل نہیں معلوم کیا گیا۔

اس کا حصہ ف (لا) خاص تکمیلی (خ، ک) کہلاتا ہے اور

اس کے باقی ماندہ حصہ کو جس میں ن مستقل شامل ہیں متم تفاعل (م) کہتے ہیں، ظاہر ہے کہ متم تفاعل اس مساوات کا حل ہے جو اصلی مساوات میں بائیں رکن کو صفر کے مساوی رکھنے سے حاصل ہوتی ہے۔ اگر یہ دونوں حل معلوم ہو جائیں تو مساوات کا پورا حل ان کا مجموعہ ہے۔

۲۷۔ دو مشہور صورتیں دو صورتیں ہیں جن کے حل بالعموم آسانی سے حاصل ہو سکتے ہیں۔

(۱) جب مقداریں ف، ف، ..... ف سب مستقل ہوں

(۲) جب مساوات کا ذیل کی شکل اختیار کرے

$$لا \frac{ف}{ف} + لا \frac{ف}{ف} + لا \frac{ف}{ف} + \dots + لا \frac{ف}{ف} = ص$$

جہاں لا، لا، ..... لا مستقل ہیں اور ص، لا کا کوئی تفاعل ہے۔

آگے چلکر معلوم ہو گا کہ دوسری صورت کا حل ایک ایسی مساوات کے حل پر موقوف ہو سکتا ہے جو پہلی قسم کے تحت میں آتی ہیں۔

**مستقل سروں والی مساواتیں۔ متم تفاعل**

۲۸۔ سب سے پہلے ہم اس طرح کی مساوات

$$لا + لا + لا + \dots + لا + لا = ص \dots (۱)$$

کا حل معلوم کرتے ہیں جس میں تمام سر مستقل مقادیر ہیں اور باقیوں  
رکن صفر ہے، یعنی فی الحال ہم صرف ”مشم تفاعل“ معلوم کرنے کی کوشش  
کرتے ہیں۔

اگر مائش کے طور پر فرض کرو کہ  $M = 1$  تو لا مساوات کا حل ہے،  
اسے مندرج کرنے سے حاصل ہوگا

$$M^3 + M^2 + M^1 + M^0 + \dots + M^1 + M^0 = 0 \dots (2)$$

فرض کرو کہ اس مساوات کی اصلیں

$M^1, M^2, M^3, \dots, M^1, M^0$   
ہیں جنہیں ہم فی الحال ایک دوسرے کے نامساوی فرض کرتے ہیں  
تب  $M^1, M^2, M^3, \dots, M^1, M^0$   
تمام حل ہیں اور اس لئے

$$M^3 + M^2 + M^1 + M^0 + \dots + M^1 + M^0 = 0 \dots (3)$$

ایک ایسا حل ہے جس میں  $n$  اختیاری مستقلات  $M^1, M^2, M^3, \dots, M^1, M^0$   
شامل ہیں اور یہ عام سے عام حل ہے جو حاصل ہو سکتا ہے۔

## ۲۹۔ دو اصلیں مساوی

اگر مساوات (۲) کی دو اصلیں مساوی ہوں مثلاً  $M^1 = M^2$  تو حل  
(۳) کی پہلی دو رقیں ہو جاتی ہیں  $(M^1 + M^2)$  تو لا،

اب چونکہ  $M^1 + M^2$  ایک ہی مستقل ہے، اس لئے اختیاری مستقلات  
کی تعداد میں ایک کمی ہو جاتی ہے اور اس لحاظ سے (۳) مساوات

مذکورہ کا عام سے عام حل نہیں رہتا۔  
 اب ہم اسے زیادہ غور سے دیکھتے ہیں  
 فرض کرو کہ  $m = m_1 + m_2$   
 تب  $\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$

$$= \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \dots + \frac{1}{m_n}$$

$= \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \dots + \frac{1}{m_n} \right) = \frac{1}{m}$   
 اب چونکہ  $\frac{1}{m}$  اور  $\frac{1}{m_1}$  دو بے تعلق اختیاری مقداریں ہیں، اس لئے انہیں  
 ہم دو اور بے تعلق اختیاری مقداروں کی رقوم میں دو ربطوں کے  
 ذریعہ جنہیں ہم اختیار کرنا چاہیں بیان کر سکتے ہیں۔  
 اولاً  $\frac{1}{m}$  کو اتنا بڑا مانو کہ بالآخر حاصل ضرب  $\frac{1}{m}$  جہاں  $m$  لانتھا  
 کم ہے  $\frac{1}{m}$  کے مساوی ہو جو ایک اختیاری محدود مستقل ہے۔  
 ثانیاً  $\frac{1}{m_1}$  کو  $\frac{1}{m}$  سے مختلف علامت مانو اور اس کی قیمت اتنی بڑی  
 منتخب کرو کہ  $\frac{1}{m} + \frac{1}{m_1}$  ایک اختیاری محدود مستقل  $\frac{1}{m}$  کے مساوی ہو  
 اب رقوم

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \dots + \frac{1}{m_n}$$

$m$  کے معدوم ہونے کی وجہ سے فنا ہو جائیں گی کیونکہ  $\frac{1}{m}$  محدود  
 ہے اور مربع خطوط وحنانی کے اندر کا جملہ مستحق ہے اور اس میں  $\frac{1}{m}$  ربطوں  
 جزو ضربی کے شریک ہوتا ہے۔

پس اگر  $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$  تو رقوم  $\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \dots + \frac{1}{m_n}$  کی بجائے ہم  
 $\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \dots + \frac{1}{m_n}$  لکھ سکتے ہیں، اس لئے حل مذکور میں اختیار کیا

مستقلات کی تعداد ۵ ہی رہتی ہے۔ پس اس صورت میں یہ مساوات کا عام حل ہے۔

۳۔ تین اصلیں مساوی اب ہم اس صورت پر غور کرتے ہیں

جبکہ مساوات (۲) کی تین اصلیں مساوی ہوں یعنی  $m = m = m$ ۔  
 حسب بالا رقوم  $\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}m$  کی بجائے ہم

$(b + \frac{1}{2}m)$  کو  $\frac{1}{2}m$  رکھ سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ  $m = m + k$

تب  $\frac{1}{2}m = \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}k = \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}k$  (۱)  $\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}k + \dots$

پس  $\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}m$  کی بجائے ہم

$(b + \frac{1}{2}m) + (b + \frac{1}{2}m) + \frac{1}{2}m$

$+\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}m + \dots$

رکھ سکتے ہیں اور  $\frac{1}{2}m$ ،  $b$  کو اس طرح منتخب کر سکتے ہیں کہ

$b + \frac{1}{2}m = c$

$b + \frac{1}{2}m = c$

$\frac{1}{2}m = c - b$

جہاں  $c$ ،  $b$ ،  $c$  کوئی اختیاری مستقل ہیں، خواہ کچھ ہی ہو

بشرطیکہ یہ صفر مطلق نہ ہو۔ لیکن چونکہ ایک کو ایک محدود مقدار کے مساوی منتخب کیا گیا ہے اور خطوط وحدانی کے اندر کا سلسلہ مستقیم ہے اس لئے ظاہر ہے کہ گنگ کو لانا انتہا کم کرنے سے بالآخر اس جملہ کی انتہائی صورت یہ ہوگی (ج + ج لا + ج لا) و<sup>۱۱</sup>۔

۳۔ کئی اصلیں مساوی اس طرح ظاہر ہے کہ اگر مساوات  
(۲) کی ع اصلیں مساوی ہوں یعنی

$$e = \dots = \mu = \nu = 1$$

تو ہمارے عمل کی عمومیت میں کسی قسم کا فرق نہیں آئے گا اگر ہم متمم  
تفاعل کے متناظر حصہ

$$1^{\text{st}} + 2^{\text{nd}} + \dots + n^{\text{th}}$$





۳۳۔ خیالی اصلیں اگر دفعہ ۲۸ مساوات (۲) کی ایک اصل خیالی ہو تو یاد رہے کہ حقیقی سروں والی مساواتوں میں خیالی اصول کے ہمیشہ جوڑے واقع ہوتے ہیں۔

مثلاً فرض کرو کہ  $م = ل + خ$  ب،  $م = ل - خ$  ب جہاں  $خ = ل - ا$

تب رقوم  $ل$  کو  $لا$  یا  $ل$  کو  $لو$  (ل + خ ب) لا +  $ل$  کو  $لو$  (ل - خ ب) لا

حقیقی صورت میں اس طرح لائی جاسکتی ہیں:-

$ل$  کو  $لا$  و  $خ$  ب لا +  $ل$  کو  $لا$  و  $خ$  ب لا

$= ل$  کو  $لا$  (جم ب لا + خ جب ب لا) +  $ل$  کو  $لا$  (جم ب لا - خ جب ب لا)

$= (ل + ل) کو لا$  جم ب لا +  $(ل - ل) کو لا$  خ جب ب لا

$= ب$  کو  $لا$  جم ب لا +  $ب$  کو  $لا$  جب ب لا

جہاں  $ل + ل$  اور  $(ل - ل)$  خ کی بجائے

اختیاری مستقل ب اور ب رکھے گئے ہیں۔

فرض کرو کہ  $ب = د$  جم ع،  $ب = د$  جب ع تب

$د = ب$  +  $ب$  اور ع = مس  $\frac{ب}{ب}$

ب جم ب لا + ب جب ب لا = د جم (ب لا - ع)

پس اس طرح ہم

بم و لاجم ب لا + بم و لاجب ب لا کی بجائے

جم و لاجم (ب لا + جم)

رکھ سکتے ہیں جہاں ج، جم اختیاری مستقل ہیں۔

۴۔ مکر خیالی اصلیں

مکر خیالی اصولوں کے لئے ہم پہلے کی طرح عمل کر سکتے ہیں کیونکہ یہ ثابت ہو چکا ہے کہ اگر  $م = م$  تو  $م و لا + م و لا$  کی بجائے

(بم + ب لا) و لا لکھا جاسکتا ہے اور  $م و لا + م و لا$  کی بجائے  
(بم + ب لا) و لا

پھر اگر  $م = م$  =  $م$  +  $م$  اور  $م = م$  =  $م$  -  $م$  تو ہم  
 $م و لا + م و لا + م و لا + م و لا$

کی بجائے (بم + ب لا) و لا + (بم + ب لا) و لا -  $م$  -  $م$

یعنی و لا [(بم + ب لا) جم ب لا + (بم - ب لا) خرج ب لا]

+ لا و لا [(بم + ب لا) جم ب لا + (بم - ب لا) خرج ب لا]

اور اسلئے و لا (جم ب لا + جم ب لا) + لا و لا (جم ب لا + جم ب لا)

یعنی  $\text{فولا} (\text{ج} + \text{لا ج})$  جم ب لا +  $\text{فولا} (\text{ج} + \text{لا ج})$  جب ب لا

یا دوسری صورت میں  $\text{د فولا ججم} (\text{ب لا} + \text{ج}) + \text{د فولا ججم} (\text{ب لا} + \text{ج})$  لکھ سکتے ہیں۔

آخری تین صورتوں میں سے ہر ایک میں چار اختیاری مستقل شامل ہوتے ہیں جو ابتدا کے اختیاری مستقلات  $\text{ا}^1, \text{ا}^2, \text{ا}^3, \text{ا}^4$  کی بجائے ہیں پس اس صورت میں بھی اختیاری مستقلات کی تعداد (۴) ہی رہتی ہے جو اس حل کو عام سے عام بنانے کے لئے ضروری ہے۔  
ظاہر ہے کہ اس قاعدہ کی توسیع اُس صورت میں بھی ہو سکتی ہے جبکہ خیالی اصولوں کی کوئی سی تعداد مساوی ہو۔

$$۳۵ - \text{مساوات} \quad \frac{\text{فر}^2}{\text{فر}^2} - ۳ \frac{\text{فر}^2}{\text{فر}^2} + ۲ = ۰ \text{۔ کو حل کرو}$$

اس جگہ آزمائشی حل  $\text{ا} = \text{ا}^1 \text{ فولا}$  ہے، اس کو مندرجہ کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$۰ = ۲ - ۳ + ۲ = ۰$$

جبکی اصلیں ۱ اور ۲ ہیں۔

پس  $\text{ا} = \text{ا}^1 \text{ فولا}$  اور  $\text{ا} = \text{ا}^2 \text{ فولا}$  دونوں خاص حل ہیں اور

$$\text{ا} = \text{ا}^1 \text{ فولا} + \text{ا}^2 \text{ فولا}$$

عام حل ہے جس میں دو اختیاری مستقل ہیں۔

$$\text{مثال ۲ - حل کرو} \quad \frac{\text{فر}^2}{\text{فر}^2} - \text{ا}^2 = ۰ \text{۔ کو}$$

یہاں ابتدائی مساوات  $\text{ا}^1 = ۰$  ہے اور اس کی اصلیں  $\text{م} = \pm \text{ا}^1$

اور عام حل ہے  $ما = ا + و + لا$

اور اگر ضرورت ہو تو اسے ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں

$ما = ب + ج + لا + ب + ج + لا$

جہاں  $ا$  کی بجائے  $ب + ج$  اور  $و$  کی بجائے  $ب - ج$  لکھا گیا ہے

مثال ۳ -  $\frac{و^۲}{و + لا} + و^۲ = ما$  کو حل کرو

یہاں امدادی مساوات  $م^۱ + و^۲ = .$  کی اصلیں  $م = \pm و$  لیں

اور عام حل ہے  $ما = ا + ج + لا + ا + ج + لا$

یا دوسری صورت میں  $ما = ب + ج + لا + ب + ج + لا$

مثال ۴ -  $\frac{و^۳}{و + لا} - \frac{و^۳}{و + لا} + ۵ = ما$

یا (عف - ۱) (عف - ۲) = ما۔ جہاں  $\frac{و^۳}{و + لا}$  کی بجائے عف

لکھا گیا ہے۔

امدادی مساوات ہے  $م^۱ - م^۲ + م^۳ = ۵$

یا  $(م - ۱)(م - ۲) = .$  یعنی اصلیں  $۱، ۲$  ہیں

پس عام حل ہے  $ما = (ا + و + لا) (و + لا)$

مثال ۵ -  $(عف + ۱)(عف - ۱) = ما$

امدادی مساوات ہے  $(م + ۱)(م - ۱) = .$

جس کی اصلیں  $\pm ۱$  ہیں، اس لئے عام حل ہے

$ما = ا + ج + لا + ا + ج + لا + و + لا$

یا  $ما = بجم (لا + ب) + ل و$

مثال ۶۔ حل کرد (عف + عف + ۱) (عف - ۲)  $ما = ۰$  کو

امدادی مساوات ہے  $(م + م + ۱) (م - ۲) = ۰$

اور اس کی اصلیں ہیں  $-\frac{۱}{۲} \pm \sqrt{\frac{۳}{۲}}$  اور ۲، اس لئے عام حل ہے

$ما = ل و - \frac{۱}{۲} جم لا + ل و - \frac{۱}{۲} جب لا + ل و$

یا  $ما = ب و - \frac{۱}{۲} جم (لا + ب) + ل و$

مثال ۷۔ (عف + عف + ۱) (عف - ۲) (عف - ۵)  $ما = ۰$  کو حل کرد  
صریحاً اس کا عام حل ہے

$ما = (ل + ل + لا) و - \frac{۱}{۲} جم لا + (ل + ل + لا) و - \frac{۱}{۲} جب لا$

$+ (ل + ل + لا + لا + لا) و - \frac{۱}{۲} و + ل و$

جس میں آٹھ اختیاری مستقل شامل ہیں۔

امثلہ

ذیل کی تفرقی مساواتوں کو حل کرد

$$۱۔ \frac{۲}{۳} ما - (ل + ب) \frac{۲}{۳} + ل ب ما = ۰$$

$$۲۔ \frac{۲}{۳} ما - ل \frac{۲}{۳} + \frac{۲}{۳} ما + ل \frac{۲}{۳} - ل ما = ۰$$

$$۳۔ \frac{۲}{۳} ما - ۹ \frac{۲}{۳} + ل ما + ۲۳ \frac{۲}{۳} - ل ما = ۰$$

$$۴ - \frac{فر۳}{فر۳} - ۳ = \frac{فر۳}{فر۳} + ۲ = ۵ - \frac{فر۳}{فر۳} = ۱$$

$$۶ - \frac{فر۳}{فر۳} = ۱ - (عف - ۱) (عف - ۲) = ۱$$

$$۸ - (عف + ۱) (عف + ۱) (عف + ۱) = ۱ - ۹ - (عف + ۱) (عف - ۱) = ۱$$

$$۱۰ - (عف + ۱) (عف + ۱) (عف + ۱) = ۱$$

$$۱۱ - (عف - ۱) (عف - ۲) (عف + ۲) (عف + ۲) = ۱$$

$$۱۲ - (عف + ۱) (عف + ۱) (عف + ۱) (عف + ۱) (عف + ۱) = ۱$$

### خاص تکمیلی

۳۶ - اوپر ہم نے مساوات ف (عف) = ۱ کے متم تفاعل پر غور کیا ہے جہاں

$$ف (عف) = عف + عف + عف + عف + عف + ..... + عف$$

اور عف، عف، عف، عف، عف، .....، عف کا کوئی تفاعل ہے، اب ہم اس مساوات کے خاص تکمیلی کو حاصل کرنے کے چند کارآمد طریقوں پر غور کرتے ہیں -

ہم اوپر کی مساوات کو اس طرح لکھتے ہیں =  $\frac{۱}{ف (عف)}$  و

یا [ف (عف)] اور جہاں  $\frac{۱}{ف (عف)}$  ایک ایسا عامل ہے کہ

$$ف (عف) [ف (عف)] = ۱$$

۷۔ "عف" جبر و مقابلہ کے اساسی اصولوں کو پورا کرتا ہے  
تفریق احصا میں یہ ثابت ہو چکا ہے کہ عامل عف

(یعنی  $\frac{م}{و}$ ) قوانین ذیل کو پورا کرتا ہے

(۱) جبر و مقابلہ کا تقسیمی قانون یعنی

$$\text{عف} (م + و + ه + ... ) = \text{عف} م + \text{عف} و + \text{عف} ه + ...$$

(۲) قانون مبادلہ صرف بلحاظ مستقلوں کے یعنی

$$\text{عف} (ج م) = (ج عف م)$$

(۳) قانون قوت نمائینی

$$\text{عف}^۲ \text{عف} م = \text{عف}^۳ م$$

جہاں م، ن مثبت صحیح ہیں۔

پس رہنما علامت عف جبر یہ مقادیر کی باہمی ترکیب کے تمام  
ابتدائی قوانین کو پورا کرتی ہے صرف متغیر مقداروں کے ساتھ اس  
کا تبادلہ نہیں ہو سکتا۔

پس معلوم ہوا کہ کسی منطق جبر یہ تماش کے جواب میں عاملوں  
کا بھی ایک متناظر تماش ہو گا مثلاً مسئلہ ثانی کی رو سے

$$(م + و) = م + و + م + و + \frac{ن(۱-ن)}{۲ \times ۱} + و^۲ + ... + و^۳$$

اور ایسے ہی بغیر مزید ثبوت کے عاملوں کے لئے متناظر مسئلہ کی رو سے

$$(\text{عف} + و) = \text{عف} + و + \text{عف} + و + \frac{ن(۱-ن)}{۲ \times ۱} + و^۲ \text{عف} + ... + و^۳ \text{عف}$$

$$= \text{عف} + و + و \text{عف} + و^۲ \text{عف} + \frac{ن(۱-ن)}{۲ \times ۱} + و^۳ \text{عف} + ... + و^۴$$



۳۸۔  $\text{عل ن (عف) } \dot{\text{و}}\dot{\text{لا}}$   
 تفرقی احصا میں یہ ثابت ہو چکا ہے کہ اگر مثبت صحیح ہو تو  
 $\text{عف } \dot{\text{و}}\dot{\text{لا}} = \dot{\text{ر}} \dot{\text{و}}\dot{\text{لا}}$

فرض کرو کہ  $\text{عل عف} \dot{\text{ر}}\dot{\text{و}}\dot{\text{لا}}$  ایسا ہے کہ  
 $\text{عفا عف} \dot{\text{ر}}\dot{\text{و}}\dot{\text{لا}} = \text{ی}$   
 اس تعریف کے مطابق  $\text{عفا}$  عمل تکمیل کو تعبیر کرتا ہے، ہم فرض  
 کرتے ہیں کہ  $\text{عل عف} \dot{\text{ر}}\dot{\text{و}}\dot{\text{لا}}$  ہی میں کسی اختیاری مستقل کا اضافہ نہیں  
 ہوتا (کیونکہ یہاں ہمیں صرف ایک خاص تکمیلی کی تلاش ہے نہ کہ عام  
 سے عام تکمیلی کی)

اب چونکہ  $\text{عفا} \dot{\text{ر}}\dot{\text{و}}\dot{\text{لا}} = \dot{\text{و}}\dot{\text{لا}} = \text{عفا عف} \dot{\text{ر}}\dot{\text{و}}\dot{\text{لا}}$

اس سے ظاہر ہے کہ  $\text{عفا} \dot{\text{ر}}\dot{\text{و}}\dot{\text{لا}} = \dot{\text{ر}}\dot{\text{و}}\dot{\text{لا}}$   
 اس لئے ظاہر ہے کہ  $\text{ن}$  کی تمام مثبت، منفی صحیح قیمتوں کے لئے  
 $\text{عفا} \dot{\text{و}}\dot{\text{لا}} = \dot{\text{ر}} \dot{\text{و}}\dot{\text{لا}}$

۳۹۔ فرض کرو کہ  $\text{ن (ی) کوئی جملہ ہی کا ہے جو ی کی مثبت}$   
 یا منفی صحیح قوتوں میں  $(= \text{ح } \dot{\text{ر}}\dot{\text{و}}\dot{\text{لا}} \text{ جہاں } \dot{\text{ر}} \text{ ایک مستقل ہے})$   
 اور  $\text{ی}$  پر منحصر نہیں ہے (پھیل سکتا ہے)

تب  $\text{ن (عف) } \dot{\text{و}}\dot{\text{لا}} = (\text{ح } \dot{\text{ر}}\dot{\text{و}}\dot{\text{لا}} \text{ عف}) \dot{\text{و}}\dot{\text{لا}}$

$= (\text{ح } \dot{\text{ر}}\dot{\text{و}}\dot{\text{لا}} \text{ عف } \dot{\text{و}}\dot{\text{لا}})$

$= (\text{ح } \dot{\text{ر}}\dot{\text{و}}\dot{\text{لا}}) \dot{\text{و}}\dot{\text{لا}}$

= ف (۱) فولا  
عمل ف (عف) فولا کا جو حاصل ہے وہ عف کی بجائے ۱ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۱-  $\frac{1}{\text{عف}^2 + \text{عف} + 1}$  فولا کی قیمت معلوم کرو۔

اس قاعدہ کی رو سے قیمت مطلوبہ ہے

$$\frac{1}{1 + 2 + 2 + 2} \text{ فولا} = \frac{1}{15}$$

مثال ۲-  $\frac{1 + \text{عف}}{(2 + \text{عف})(3 + \text{عف})(4 + \text{عف})}$  فولا کی قیمت معلوم کرو

اس قاعدہ کی رو سے قیمت مطلوبہ ہے  $\frac{1}{4 \times 2 \times 5} \text{ فولا} = \frac{2}{105}$

امثلہ

۱- ذیل کے عملوں کو پورا کرو۔

$$(۱) \frac{1}{\text{عف} + 1} \text{ فولا} \quad (۲) \frac{1}{(۱ + \text{عف})(۲ + \text{عف})} \text{ فولا}$$

$$(۳) \frac{1}{(۲ + \text{عف})(۳ + \text{عف})(۴ + \text{عف})} \text{ جملہ}$$

۲- ثابت کرو کہ  $\frac{\text{عف}^2}{(۱ - \text{عف})(۲ - \text{عف})(۳ - \text{عف})} = \frac{1}{(۱ - \text{ج})(۲ - \text{ب})(۳ - \text{ج})} \text{ فولا}$

۳- ذیل کے نتائج ثابت کرنے میں دفعہ ۳۹ کو استعمال کرو

ف (عف) جب م لا = ف (م) جب م لا

ف (عفا) جب م لا = ف (م) جب م لا



۴۱۔ جیسا دفعہ ۳۹ میں ہم نے دیکھا

$$ف (عف) \dot{و} لا لا = > (ر عف) \dot{و} لا لا$$

$$= > (ر عف) \dot{و} لا لا$$

$$= \dot{و} لا لا (ر عف + ر) لا$$

$$= \dot{و} لا ف (عف + ر) لا$$

یعنی  $\dot{و} لا$  کو ہم بائیں ف (عف) کے بائیں جانب سے دائیں جانب لاسکتے ہیں بشرطیکہ ہم عف کی بجائے عف + ر لکھ دیں۔

مثال ۱۔  $\frac{ا}{(عف-۱)} \dot{و} لا = \dot{و} لا عف = لا = \dot{و} لا \frac{ا}{۳ \times ۳ \times ۲}$

مثال ۲۔  $\frac{ا}{(عف-۲) عف + ۲} \dot{و} لا جب لا = \dot{و} لا عف جب لا = - \dot{و} لا جب لا$

امثلہ

۱۔ ذیل کے عملوں کو پورا کرو۔

$$\frac{ا}{(عف-۱)} \dot{و} لا ، \frac{ا}{(عف-۱)} \dot{و} لا جب لا ، \frac{ا}{(عف-۱)} \dot{و} لا$$

۲۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{ا}{(عف-۱) (عف-۱) (عف-۱)} \dot{و} لا = \frac{ا}{(عف-۱) (عف-۱) (عف-۱)} \dot{و} لا$$

۴۲۔ عمل ف (عف) جب م لا

$$\text{عفا}^1 \text{ جب } م \text{ لا} = (-م^2) \text{ جب } م \text{ لا}$$

اور اس لئے عفا<sup>۲</sup> جب م لا = (-م<sup>۲</sup>) جب م لا  
اس لئے حسب سابق (دفعات ۳۹، ۴۱) معلوم ہوگا کہ

$$ن (\text{عفا}^2) \text{ جب } م \text{ لا} = ن (-م^2) \text{ جب } م \text{ لا}$$

مثال ۴۱:  $\text{عفا}^1 \text{ جب } م \text{ لا} = \text{عفا}^2 \text{ جب } م \text{ لا} = \text{عفا}^3 \text{ جب } م \text{ لا}$  [دفعہ ۴۱]

$$= \frac{\text{عفا}^1 - \text{عفا}^2}{\text{عفا}^2 - \text{عفا}^3} \text{ جب } م \text{ لا}$$

$$= \frac{\text{عفا}^1}{\text{عفا}^2 + \text{عفا}^3} \text{ جب } م \text{ لا} \text{ [دفعہ ۴۲]}$$

$$= \frac{\text{عفا}^1 \text{ جب } م \text{ لا} - \text{عفا}^2 \text{ جب } م \text{ لا}}{\text{عفا}^2 + \text{عفا}^3} = \frac{\text{عفا}^1 - \text{عفا}^2}{\text{عفا}^2 + \text{عفا}^3} \text{ جب } م \text{ لا}$$

یہاں

مثلاً

۱۔ اس طریقہ سے جملات ذیل کے تکملی معلوم کرو

عفا<sup>۱</sup> جب م لا، عفا<sup>۲</sup> جب م لا، عفا<sup>۳</sup> جب م لا، عفا<sup>۴</sup> جب م لا

۲۔ ذیل کے عملوں کو پورا کرو۔

$$\frac{\text{عفا}^1}{\text{عفا}^2 + \text{عفا}^3} \text{ جب } م \text{ لا} - \frac{\text{عفا}^2}{\text{عفا}^3 + \text{عفا}^4} \text{ جب } م \text{ لا}$$

۳۔ عفا<sup>۱</sup> اور عفا<sup>۲</sup> کی قوت غلطی قیمتوں کے ذریعہ اعمال  
ن (عفا) جب م لا، ن (عفا) جب م لا کے نتائج حاصل کرو۔

$$۴۳ - \text{عمل } \frac{۱}{\text{ف (دعفا)}} \text{ جب م لا}$$

اب ہم عمل  $\frac{۱}{\text{ف (دعفا)}}$  جب م لا پر غور کریں گے جہاں ف (ی) ایک ایسا تفاعل می کا ہے کہ اسے ہم می کی مثبت صحیح قوتوں میں پھیلا سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ ف (دعفا) کو عفا کی قوتوں میں پھیلا یا گیا ہے، اب اگر پھیلاؤ میں طاق قوتیں شریک نہ ہوں تو دفعہ ماقبل کے قاعدہ کی رو سے اوپر کے عمل کا نتیجہ فوراً حاصل ہو سکتا ہے۔

مثلاً  $\frac{۱}{\text{ف (دعفا) + عفا} + \text{عفا} + \text{عفا}} = \text{جب م لا} = \frac{۱}{۴۳ - ۱۶ + ۳ - ۱} = \frac{۱}{۲۹}$  جب م لا  
لیکن اگر ہر دو طاق اور جفت قوتیں شریک ہوں تو اس طرح عمل ہو سکتا ہے، جفت قوتوں کو الگ اور طاق قوتوں کو الگ اکٹھا کرو اور عمل مذکور کو اس طرح لکھو

$$\text{ف (دعفا)} \text{ جب م لا} = \frac{۱}{\text{ف (دعفا)} + \text{عفا} + \text{فا (دعفا)}} \text{ جب م لا}$$

$$= \frac{\text{ف (دعفا)} - \text{عفا} + \text{فا (دعفا)}}{[\text{ف (دعفا)}] - [\text{عفا}] + [\text{فا (دعفا)}]} \text{ جب م لا}$$

$$= \frac{\text{ف (دعفا)} - \text{عفا} + \text{فا (دعفا)}}{[\text{ف (دعفا)}] - [\text{عفا}] + [\text{فا (دعفا)}]} \text{ جب م لا}$$

$$= \frac{\text{ف (دعفا)} \text{ جب م لا} - \text{فا (دعفا)} \text{ جب م لا}}{[\text{ف (دعفا)}] + [\text{فا (دعفا)}]} \text{ جب م لا}$$

بغور دیکھتے سے معلوم ہوگا کہ علی طور پر عفا کی بجائے - م فوراً اس منزل -  $\frac{1}{(عفا) + (عفا) + (عفا)}$  جب م لا کے بعد لکھ سکتے ہیں یعنی اوپر کے جملہ کی بجائے

$$\frac{1}{(م - م) + (عفا - م)}$$

یا  $\frac{(م - م) - (عفا - م)}{[م - م] - [عفا - م]}$  جب م لا وغیرہ فوراً لکھ سکتے ہیں -

مثال ۱ -  $\frac{1}{عفا + عفا + عفا}$  جب م لا کی قیمت معلوم کرو -

یہ ہے  $\frac{1}{عفا + ۱ + عفا}$  جب م لا

یا  $\frac{۱}{۳ - (عفا)}$  جب م لا

یا  $\frac{عفا - ۱}{۳ - (عفا)}$  جب م لا

یا  $\frac{عفا - ۱}{۱۵}$  جب م لا

یا  $\frac{۱}{۱۵}$  جم م لا -  $\frac{۱}{۱۵}$  جب م لا

مثال ۲ -  $\frac{۱}{(عفا - ۱)}$  فوراً جم لا کی قیمت حاصل کرو

$$\text{یہ جملہ} = \frac{1}{\text{عف} + 1} \text{جم لا}$$

$$= \frac{1}{\text{عف} + 3 + 3 + 2 + 1} \text{جم لا}$$

$$= \frac{1}{\text{عف} - 3 + 3 + 1} \text{جم لا} \quad [\text{عف کی بجائے } -1 \text{ لکھنے سے}]$$

$$= \frac{1}{\text{عف} - 1} \text{جم لا}$$

$$= \frac{1}{\text{عف} - 1} \text{جم لا}$$

$$= \frac{1}{2} (\text{عف} + 1) \text{جم لا} - \frac{1}{2} (\text{جم لا} - \text{جب لا})$$

امثلہ

۱۔ جملات ذیل پر مندرجہ ذیل عمل کرو۔

$$\frac{\text{عف}}{\text{عف} - 1} \text{جب لا} \quad \frac{\text{عف}^3}{(\text{عف} - 1)(\text{عف} - 2)} \text{جب لا}$$

$$\frac{1}{\text{عف} - 1} \text{جب لا} + \frac{1}{\text{عف} + 1} \text{جب لا}$$

۲۔ ثابت کرو کہ  $\frac{1}{(\text{عف} + 1)^2} = \frac{1}{\text{عف} + 1} - \frac{1}{(\text{عف} + 2)}$  کہ تو اور لا... در لا

جہاں ن تشکلی علامتیں ہیں۔

۳۔ ثابت کرو کہ  $\frac{1}{f(f+1)}$  کو جزوی کسروں میں تحلیل کرنے سے





$$= \frac{1}{10} \left( 1 - \frac{8}{5} \text{ عف} + \frac{29}{25} \text{ عف}^2 - \frac{529}{250} \text{ عف}^3 \dots \right) \text{ لا}^3$$

$$= \frac{1}{10} \left( \text{لا}^3 - \frac{8}{5} \times 3 \text{ لا}^2 + \frac{29}{25} \times 6 \text{ لا} - \frac{529}{250} \times 4 \right)$$

مثلاً

ذیل کے عمل کرو۔

$$1 - \frac{1}{(1 + \text{عف})(2 + \text{عف})} \text{ لا}^2 \text{ عف} \frac{1}{(1 - \text{عف})} \text{ لا} \text{ عف}^2 \frac{1}{(1 - \text{عف})^2} \text{ لا}$$

$$2 - \frac{1}{(1 + \text{عف})(2 + \text{عف})} \text{ لا}^2 \text{ عف} \frac{1}{(1 - \text{عف})} \text{ لا} \text{ عف}^2 \frac{1}{(1 - \text{عف})^2} \text{ لا} \text{ جملہ لا}$$

$$3 - \frac{1}{(1 - \text{عف})} \text{ لا} \text{ جملہ لا جملہ لا}$$

۴۵۔ ایسی صورتیں جن میں یہ طریقہ ناکام رہتے ہیں۔  
خاص تکمیلی حاصل کرنے کے جو طریقے اوپر درج کئے گئے ہیں انہیں استعمال کرنے میں اکثر اوقات کئی صورتیں ایسی پیدا ہوتی ہیں جہاں یہ طریقہ کامیاب نہیں ہو سکتے، اب ہم یہ بتانے کی کوشش کرتے ہیں کہ ایسی حالتوں میں طرز عمل کیا ہونا چاہئے۔

$$۴۶۔ مساوات \frac{فرما}{فرلا} - ۱ = \text{لا کو حل کرو}$$

متمم تفاعل ۱ لا ہے۔

خاص تکمیلی حاصل کرنے کے لئے  $\frac{1}{\text{عف} - 1}$  کو کسی قیمت معلوم ہونی

چاہئے۔ اگر ہم دفعہ ۳۹ کا قاعدہ استعمال کریں تو حاصل ہوگا

$$\frac{فرما}{1 - 1} \text{ یا } \infty$$

اس مشکل سے بچنے کے لئے ہم دفعہ ۴ کا قاعدہ استعمال کرتے ہیں جس سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{\text{عف}-1} \cdot \frac{1}{\text{فو}} = \frac{1}{\text{عف}} = 1 = \frac{1}{\text{لا}} \cdot \frac{1}{\text{فو}}$$

جو مطلوبہ خاص تکمیلی ہے۔

ایک اور طریقہ استعمال کرنے کی بجائے ہم عمل  $\frac{1}{\text{عف}-1} \cdot \frac{1}{\text{فو}}$  کا بغور معائنہ کرتے ہیں۔

لا کی بجائے لا (۱+ھ) کہنے سے

$$\frac{1}{\text{عف}-1} \cdot \frac{1}{\text{فو}} = \frac{1}{\text{ہا}} \cdot \frac{1}{\text{عف}-1} \cdot \frac{1}{\text{فو}} = \frac{1}{\text{ہا}} \cdot \frac{1}{\text{عف}-1} \cdot \frac{1}{\text{فو}}$$

$$= \frac{1}{\text{ہا}} \cdot \frac{1}{\text{عف}-1} \cdot \frac{1}{\text{فو}} = \frac{1}{\text{ہا}} \cdot \frac{1}{\text{عف}-1} \cdot \frac{1}{\text{فو}} = \frac{1}{\text{ہا}} \cdot \frac{1}{\text{عف}-1} \cdot \frac{1}{\text{فو}}$$

$$= \frac{1}{\text{ہا}} \cdot \frac{1}{\text{عف}-1} \cdot \frac{1}{\text{فو}} = \frac{1}{\text{ہا}} \cdot \frac{1}{\text{عف}-1} \cdot \frac{1}{\text{فو}} = \frac{1}{\text{ہا}} \cdot \frac{1}{\text{عف}-1} \cdot \frac{1}{\text{فو}}$$

اس جملہ میں سے ھہ ہا  $\frac{1}{\text{عف}-1} \cdot \frac{1}{\text{فو}}$  لا متناہی ہو جاتا ہے لیکن اسے

ہم متمم تفاعل  $\frac{1}{\text{فو}}$  کے ساتھ لے سکتے ہیں اور چونکہ  $\frac{1}{\text{فو}}$  کی قیمت اختیاری ہے اس لئے ہم  $\frac{1}{\text{فو}}$  کو ایک نیا اختیاری مستقل ب تصور کرتے ہیں کیونکہ  $\frac{1}{\text{فو}}$  کا ایک حصہ منفی اور غیر متناہی فرض کیا جاسکتا ہے جو رقم  $\frac{1}{\text{فو}}$  کا توازن کر دے گا۔

پس لا  $\frac{1}{\text{فو}}$  مطلوبہ خاص تکمیلی ہے۔

باقی رقموں میں ھہ شریک ہوتا ہے جو ھہ کے لانتہاکم ہونے سے معدوم ہو جاتی ہیں۔

پس مساوات کا پورا حل  $\frac{1}{\text{عف}-1} \cdot \frac{1}{\text{فو}} = \frac{1}{\text{لا}} \cdot \frac{1}{\text{فو}}$  ہے۔

مثال ۲۔ مساوات  $\frac{۲}{۳} م + ۴ = ۲ + ۳$  جب ۲ لا کو حل کرو

متمم تفاعل صریحاً یہ ہے  $۴ = ۲ + ۳$  جب ۲ لا + ب جم ۲ لا

خاص تنگلی کے دو حصے ہیں  $\frac{۱}{۳} ع + ۲ = ۱$  تو یا  $\frac{۱}{۵} ق + ۲ = ۱$  اور  $\frac{۱}{۳} ع + ۲ = ۱$  جب ۲ لا  
دوسرے حصہ میں اگر دفعہ ۲ کا قاعدہ استعمال کیا جائے تو حاصل ہوگا  
جب ۲ لا یعنی ۵۰ پس یہ قاعدہ ناکام رہے گا۔

اب ہم  $\frac{۱}{۳} ع + ۲ = ۱$  جب ۲ لا (۱ + ۳) کی انتہا معلوم کرتے ہیں جبکہ  
۵ = ۵

یہ جملہ  $\frac{۱}{۳} - ۱ = \frac{۱}{(۱ + ۳)}$  جب (۲ لا + ۲ لا)

$\frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲ - ۳}$  (جب ۲ لا جم ۲ لا + جم ۲ لا جب ۲ لا)

$-\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲ - ۳}$  [جب ۲ لا (۱ - ۱) +  $\frac{۲}{۲}$  + ...] + جم ۲ لا (۲ لا - ...)

$-\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲ - ۳}$  جب ۲ لا -  $\frac{۱}{۳}$  لا جم ۲ لا + ۳ کی قوتیں

= (ایک ایسی رقم جو متمم تفاعل میں شریک کر دی جاسکتی

ہے) -  $\frac{۱}{۳}$  لا جم ۲ لا + (رقمیں جو ۵ کے ساتھ معدوم ہو جاتی ہیں)

پس تفرقی مساوات کا پورا حل ہے

$۴ = ۲ + ۳$  جب ۲ لا + ب جم ۲ لا +  $\frac{۱}{۵} ق - \frac{۱}{۳}$  لا جم ۲ لا



$$= \frac{1}{3\text{عف}} (1 - \frac{\text{عف}^2}{9} + \frac{\text{عف}^4}{27} - \dots) (لا^2 + لا + ۱)$$

$$= \frac{1}{3\text{عف}} (لا^2 + لا + ۱ - \frac{۲}{۳} لا - ۱ + لا + لا^2 - \frac{۲}{۳} لا + \frac{۲}{۳})$$

$$= \frac{1}{3\text{عف}} (لا^2 + لا + \frac{۱۰}{۳} لا - \frac{۴۴}{9})$$

$$= \frac{1}{3} (لا^2 + \frac{۵}{۳} لا - \frac{۴۴}{9})$$

اس لئے پورا حل ہے

$$۱ + لا + لا^2 - لا^3 + (لا + لا^2 + لا^3) لا^2 + لا^4$$

$$+ \frac{لا^2 + لا^4}{۸} + \frac{لا^2 + لا^4}{۱۰} + \frac{۳ جب لا - جم لا}{۲۰} + \frac{لا^2}{9} + \frac{۵ لا^4}{9} + \frac{۴۴}{۲۴}$$

مثال ۴۔ مساوات  $\frac{لا^2}{لا - ۱} = ۱$  لاجب لا کو حل کرو

شیم تفاعل (م'ت) ہے  $لا + لا^2 + لا^3 + لا^4 + لا^5 + لا^6 + لا^7 + لا^8 + لا^9 + لا^{10} + لا^{11} + لا^{12} + لا^{13} + لا^{14} + لا^{15} + لا^{16} + لا^{17} + لا^{18} + لا^{19} + لا^{20} + لا^{21} + لا^{22} + لا^{23} + لا^{24} + لا^{25} + لا^{26} + لا^{27} + لا^{28} + لا^{29} + لا^{30} + لا^{31} + لا^{32} + لا^{33} + لا^{34} + لا^{35} + لا^{36} + لا^{37} + لا^{38} + لا^{39} + لا^{40} + لا^{41} + لا^{42} + لا^{43} + لا^{44} + لا^{45} + لا^{46} + لا^{47} + لا^{48} + لا^{49} + لا^{50} + لا^{51} + لا^{52} + لا^{53} + لا^{54} + لا^{55} + لا^{56} + لا^{57} + لا^{58} + لا^{59} + لا^{60} + لا^{61} + لا^{62} + لا^{63} + لا^{64} + لا^{65} + لا^{66} + لا^{67} + لا^{68} + لا^{69} + لا^{70} + لا^{71} + لا^{72} + لا^{73} + لا^{74} + لا^{75} + لا^{76} + لا^{77} + لا^{78} + لا^{79} + لا^{80} + لا^{81} + لا^{82} + لا^{83} + لا^{84} + لا^{85} + لا^{86} + لا^{87} + لا^{88} + لا^{89} + لا^{90} + لا^{91} + لا^{92} + لا^{93} + لا^{94} + لا^{95} + لا^{96} + لا^{97} + لا^{98} + لا^{99} + لا^{100}$

(خاص تکمیلی) (خ'ک) ہے  $\frac{1}{1-\text{عف}}$  لاجب لا جو  $خ'ک$  کا سر ہے

$$\frac{1}{1-\text{عف}} لا جو لا میں$$

$$یعنی جو  $\frac{1}{1-\text{عف}}$  لا میں$$

$$یعنی جو  $\frac{1}{1-\text{عف}}$  لا میں$$

یعنی  $\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \text{ عفا}} - \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \text{ عفا}} = 1$  لا میں

یعنی  $\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \text{ عفا}} = \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \text{ عفا}}$  (لا +  $\frac{3}{2}$  خ) میں

یعنی  $\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \text{ عفا}} = \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \text{ عفا}}$  (لا -  $\frac{3}{2}$  لا) میں

پس خاص تکمیلی ہے  $\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \text{ عفا}} - \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \text{ عفا}}$  لا جب لا

اور پورا حل ہے

$\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \text{ عفا}} = \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \text{ عفا}} + \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \text{ عفا}} + \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \text{ عفا}} + \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \text{ عفا}} + \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \text{ عفا}}$  لا جب لا

مثلاً ✓

۱۔ مندرجہ ذیل کے خاص تکمیلی حاصل کرو

(۱)  $\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \text{ عفا}}$  جب لا (۲)  $\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \text{ عفا}}$  جم ۲ لا

(۳)  $\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \text{ عفا}}$  جنبر لا (۴)  $\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \text{ عفا}}$  لا

(۵)  $\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \text{ عفا}}$  (۶)  $\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \text{ عفا}}$  (جنبر لا + جب لا)

(۷)  $\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \text{ عفا}}$  (لا + جنبر لا)

(۸)  $\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \text{ عفا}}$  جم ۲ لا جم ۳ لا

۲۔ ذیل کی تفرقی مساواتوں کو حل کرو۔







$$1) (عفا^2 - عفا^1 + عفا^3 - عفا^4) = فوت^2 + فوت^4$$

یعنی (عم - ۱) (عم + ۳) = ۱۰۰ + ۲۰۰  
جس سے حاصل ہوتا ہے

$$6 = 10t + 31b + 31c + \frac{t}{4} + \frac{c}{2}$$

یا ما = ا + ب جم (ما لوک لا) + ج جب (ما لوک لا) +  $\frac{لا}{۶}$  +  $\frac{لا کوک لا}{۴}$

امثلہ ✓

ذیل کی تفرقی مساواتوں کو حل کرو

$$1. \quad \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1.$$

۲۔ لا'  $\frac{ق^۲}{ق^۲}$  + لا  $\frac{ق^۲}{ق^۲}$  + ق' ما = (لوک لا) + لا جب لوک لا  
+ جب ق' لوک لا

$$3 - 2 \frac{r_1}{r_2} + \frac{r_1^2}{r_2^2} + \frac{r_1^3}{r_2^3} + \frac{r_1^4}{r_2^4} + \dots = 1 + \frac{r_1}{r_2} + \frac{r_1^2}{r_2^2} + \frac{r_1^3}{r_2^3} + \frac{r_1^4}{r_2^4} + \dots$$

$$- \frac{r_1^2}{r_1 r_2} + \frac{r_1^2}{r_1 r_2} - \frac{r_1^2}{r_1 r_2} + \frac{r_1^2}{r_1 r_2} = 1 + \frac{r_1}{r_2} - \frac{r_1}{r_2} + \frac{r_1}{r_2}$$

$$5. - (1 + b) \frac{a}{r} + b(1 + b) \frac{a}{r} + \frac{a}{r} = a.$$



# باب پنجم

قائم مریات، متفرق مساواتیں

قائم مری

۴۸۔ کارٹینری مساواتیں۔ مساوات ف (لا، ما، ا)۔۔ منحنیات کے ایک قبیل کو تعبیر کرتی ہے، اب سوال زیر بحث یہ ہے کہ اگر منحنیات کے ایک قبیل کی مساوات دی ہوئی ہو تو ہم ایک ایسے قبیل منحنیات کی مساوات معلوم کریں جس کا ہر ایک رکن پہلے قبیل کے ہر ایک رکن کو علی القوائم قطع کرے۔ جیسا پہلے بتایا گیا ہے ایسے سوالات میں ضروری ہے کہ پہلے قبیل کے تمام رکنوں پر ایک ساتھ عمل کیا جائے، اس لحاظ سے مخصوص کرنے والا مستقل لا اس قبیل کی مساوات میں شریک نہیں ہونا چاہئے، وفد ۲ میں بتایا گیا ہے کہ لا ذیل کی دو مساواتوں کے ذریعہ ساقط ہو سکتا ہے

ف (لا، ما، ا)۔۔

$$\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} \times \frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}} =$$

فرض کرو کہ یہ حاصل اسقاط فہ (لا، ما، ا) فہ (لا، ما، ا)۔۔

ہے پس یہ پہلے قبیل کی تفرقی مساوات ہے۔  
اب جہاں پہلے نظام کا ایک رکن دوسرے نظام کے ایک رکن کو

قطع کرتا ہے اُس نقطہ پر ان دو منحنیات کے تماس علی القوائم ہیں۔  
پس اگر اس نقطہ تقاطع کے رواں محدود بلحاظ دوسرے قبیل کے منحنی کے  
ضام، عا اور اگر اسی نقطہ کو پہلے قبیل کے مذکورہ منحنی پر خیال کیا جائے  
اور اس کے لحاظ سے اس کے رواں محدود لا، ما ہوں تو

$$\text{ضا} = \text{لا}، \text{عا} = \text{ما}، \frac{\text{حزعا}}{\text{حزضا}} = - \frac{\text{حزلا}}{\text{حزما}}$$

اس لئے دوسرے قبیل کی تفرقی مساوات ہوگی

$$\text{ح} (\text{ضا}، \text{عا}) = \left( \frac{\text{حزضا}}{\text{حزعا}} \right) = -$$

اور اس کو تکمیل کرنے سے پہلے نظام کے قائم مریات کا قبیل حاصل ہوگا۔  
اس لئے قاعدہ یہ ہے۔

مساوات معلومہ کو تفرق کرو اور مستقل کو ساقط کرو، پھر  $\frac{\text{حزما}}{\text{حزلا}}$  کی بجائے  
-  $\frac{\text{حزلا}}{\text{حزما}}$  لکھو اور تفرقی مساوات کو تکمیل کرو۔

۴۹۔ قطبی مساواتیں۔ اگر منحنی کی مساوی قطبی محدودوں میں دی ہوئی ہو

تو وہ ناویہ جو سمتی نیم قطر تماس کے ساتھ بنانا ہے  $\frac{\text{حزفرطہ}}{\text{حزمرطہ}}$  ہوگا،  
اس صورت میں قاعدہ مذکورہ یہ ہوگا۔

مساوات کو تفرق کرو اور مستقل کو ساقط کرو، پھر  $\frac{\text{حزمرطہ}}{\text{حزفرطہ}}$  کی

بجائے -  $\frac{1}{r} \frac{\text{حزمرطہ}}{\text{حزفرطہ}}$  لکھ کر نئی تفرقی مساوات کو تکمیل کرو۔

۵۰۔ دائروں کے قبیل  $\text{لا} + \text{ما} = ۲ \text{ لا}$  ..... (۱)  
کا ہر رکن محور ما کو مبدأ پر مس کرتا ہے، اس قبیل کے قائم مریات

کا نظام معلوم کرو۔

$$\text{یہاں } لا + ما = \frac{فر}{لا} = ۱$$

$$\text{اور } لا کو ساقط کرنے سے } لا^۲ + ما^۲ = ۲ لا (لا + ما) \frac{فر}{لا}$$

$$\text{یعنی } لا^۲ + ۲ لا ما = \frac{فر}{لا} ما^۲ - ما^۲ = ..... (۲)$$

اس لئے نئی تفرقی مساوات ہوگی ۔

$$لا - لا^۲ + ۲ لا ما = \frac{فر}{لا} ما^۲ - ما^۲ =$$

$$\text{یا } ما^۲ + ۲ لا ما = \frac{فر}{لا} لا^۲ - لا^۲ =$$

جو ایک متجانس مساوات ہے اور اس میں  $ما = لا$  رکھنے سے اس کے متغیر الگ ہو سکتے ہیں۔

مگر چونکہ اس مساوات اور مساوات (۲) میں صرف اتنا فرق ہے کہ  $لا$ ،  $ما$  کا باہم تبادلہ کر دیا گیا ہے اس لئے اس کا تکمیل ہوگا

$$ما^۲ + لا^۲ = ۲ ما لا$$

جو دائروں کا ایک اور نظام ہے جس کا ہر ایک رکن محور کا کو مبدا پر مس کرتا ہے۔

$$\text{مثال ۲۔ منحنيات } \frac{لا}{لا + لہ} + \frac{ما}{ما + لہ} = ۱ ..... (۱)$$

کے قائم مریات کا نظام معلوم کرو جہاں لہ اس قبیل کا متبیل ہے۔

$$\text{یہاں } \frac{لا}{لا + لہ} + \frac{ما}{ما + لہ} = ..... (۲)$$

اور ان دو مساواتوں سے لہ کو ساقط کرنا چاہئے۔

(۲) سے حاصل ہوتا ہے لا (ب<sup>۱</sup> + ل<sup>۱</sup>) + ماما (ل<sup>۱</sup> + ل<sup>۲</sup>) =

$$\text{یا لہ} = \frac{\text{ب}^۱ \text{لا} + \text{لا} \text{ماما}}{\text{لا} + \text{ماما}}$$

$$\text{پس ل} + \text{لہ} = \frac{\text{لا} - \text{ب}^۱ \text{لا}}{\text{لا} + \text{ماما}}$$

$$\text{اور ب}^۱ + \text{لہ} = \frac{\text{لا} - \text{ب}^۱ \text{ماما}}{\text{لا} + \text{ماما}}$$

پس اس قبیل کی تفرقی مساوات ہے

$$۱ = \frac{\text{لا}^۲ (\text{لا} + \text{ماما})}{\text{لا} (\text{لا} - \text{ب}^۱ \text{لا})} - \frac{\text{ما}^۲ (\text{لا} + \text{ماما})}{\text{لا} (\text{لا} - \text{ب}^۱ \text{ماما})}$$

$$\text{یا لا}^۲ - \text{ما}^۲ + \text{لا} \text{ما} (\frac{۱}{\text{لا}} - \frac{۱}{\text{ما}}) = \text{لا} - \text{ب}^۱ \text{لا} \dots\dots\dots (۳)$$

اس لئے ما کی بجائے  $\frac{۱}{\text{ما}}$  لکھنے سے مطلوبہ مریات کے قبیل کی تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے

$$\text{لا}^۲ - \text{ما}^۲ + \text{لا} \text{ما} (-\frac{۱}{\text{ما}} + \frac{۱}{\text{لا}}) = \text{لا} - \text{ب}^۱ \text{لا} \dots\dots\dots (۴)$$

لیکن چونکہ اس میں اور مساوات (۳) میں کوئی فرق نہیں ہے اس لئے اس کا تکملی بھی وہی ہوگا

$$۱ = \frac{\text{لا}^۲}{\text{لا} + \text{ما}} + \frac{\text{ما}^۲}{\text{ب}^۱ + \text{ما}}$$

جو ایسی مخروطی تراشوں کا ایک نظام ہے جو پہلے نظام کے ساتھ ہم

ماسکے ہیں۔ مثال ۳۔ دو مختلف قیمتوں کے لئے صنوبری خطوط کے قبیل

لہ = ل (۱ - جم طہ) کے قائم مریات کا نظام معلوم کرو۔

یہاں  $\frac{ر}{ر طه} = ا جب طه$   
اور ا کو ساقط کرنے سے

$\frac{ر}{ر طه} = ا - جب طه = مس \frac{طه}{۲}$   
اس لئے قائم مربیات کے قبیل کے لئے

$$- \frac{ا}{ر} - \frac{ر}{ر طه} = مس \frac{طه}{۲}$$

یا لوک ر = ۲ لوک جم طه + مستقل

یا ر = ب (ا + جم طه)

جو ہم محور صنوبری خطوط کا ایک اور قبیل ہے جن کے قرون کا رخ متقابل سمت میں ہے۔

### امثلہ

۱۔ ا کی مختلف قیمتوں کے لئے مکافات  $ما^۲ = ۴ ا لا$  کے قائم مربیات کا نظام معلوم کرو۔

۲۔ ثابت کرو کہ م کی مختلف قیمتوں کے لئے متناہ ناقصوں کے

$$قبیل \frac{لا^۲}{ا} + \frac{ما^۲}{ب} = م کے قائم مربیات کا نظام$$

لا = ا ما ب ہے۔

۳۔ ا کی مختلف قیمتوں کے لئے مساوی الزاویہ لولبیوں

کے قبیل ر = ا و طه م کے قائم مربیات معلوم کرو۔

۴۔ ا کی مختلف قیمتوں کے لئے ہم محور اور ہم ماسکہ مکافیوں  
 $\frac{ا}{ر} = ا + جم طه$  کے قائم مربیات کا قبیل معلوم کرو۔

۵۔ ثابت کرو کہ منحنیات کے قبیل

$$\left\{ \begin{array}{l} ۱ - ۳ لا ۲ = ۱ \\ ۲ لا ۲ - ۲ = ۲ ب \end{array} \right.$$

علی القوائم ہیں۔

۶۔ ثابت کرو کہ منحنیات رجب<sup>۱</sup> عہ = ۱ (جم طہ - جم عہ)

اور رجب<sup>۲</sup> بہ = ۱ (جمربہ - جم طہ)

علی القوائم ہیں۔

۷۔ اگر ف (لا + خ ما) = می + خ و تو ثابت کرو کہ

$$می = ۱ اور د = ۲ ب$$

قائم منحنیات کے دو نظام ہیں۔

۸۔ ثابت کرو کہ مہ کی کسی مستقل قیمت کے لئے منحنیات کا قبیل

قبیل مہ مخرلا - قمر لا جم ما = مستقل سے منحنیات کو علی القوائم قطع کرتا ہے۔

[تذکرہ ۸۹]

## علم حرکت کی چند مشہور مساواتیں

۵۔ مساوات  $\frac{فری}{فرطہ} + می = ف (می)$

ایک ایسے ذرہ کی حرکت کسی عام مساوات ہے جو ایک مرکزی قوت کے زیر اثر حرکت کر رہا ہو۔

۲  $\frac{فری}{فرطہ}$  کے ساتھ ضرب دینے اور یکمیل کرنے سے

$$\left( \frac{فری}{فرطہ} \right) + می = ۲ ف (می) + ۱$$



جے ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں  $\int \frac{دری}{(۲+۱) (ی-ی)} = طه + ب$   
 اس طرح حل عمل میں آسکتا ہے۔

۵۲۔  $\frac{دری}{درطه} + نای = ف (طه)$  مستقل سروں والی  
 ایک خطی مساوات ہے، ایسی مساواتوں پر پہلے بحث ہو چکی ہے  
 ان کا حل اس طرح بھی عمل میں آسکتا ہے۔  
 جب ن طه کے ساتھ ضرب دو جو متکمل جزو ضربی ہے  
 متکمل کرنے سے

جب ن طه  $\frac{دری}{درطه} - نی جم ن طه = ف (طه)$  جب ن طه  $\frac{دری}{درطه} +$   
 اسی طرح جم ن طه متکمل جزو ضربی ہے اور اس کے جواب  
 میں پہلا متکملی

جم ن طه  $\frac{دری}{درطه} + نی جب ن طه = ف (طه)$  جم ن طه  $\frac{دری}{درطه} + ب$

$\frac{دری}{درطه}$  کو ساقط کرنے سے

نای =  $ف (طه)$  جب ن طه  $(طه - طه)$   $درطه + ب$  جب ن طه

جم ن طه

۵۳۔ ایک ایسے جسم کی مساوات حرکت جس کی کمیت بدلتی ہو  
 اکثر یہ صورت اختیار کرتی ہے

$\frac{دری}{درت} \{ ف (لا) \} = سا (لا)$

اور اس کا متکمل جزو ضربی فہ (لا) فرت ہے۔

کیونکہ فہ (لا) فرت فرت {فہ (لا) فرت} = سا (لا) فہ (لا) فرت  
 جس سے حاصل ہوتا ہے  $\frac{1}{4} = \{فہ (لا) فرت\} = سا (لا) فہ (لا) فرت$

$$\text{یا } \frac{1}{4} = \frac{\text{فہ (لا) فرت}}{\text{سا (لا) فہ (لا) فرت} + 1} = \text{فرت}$$

متغیر جدا ہو گئے ہیں پس حل مطلوب حاصل ہو سکتا ہے۔

### مزید توضیحی مثالیں

۵۴۔ کئی مساواتوں کو خاص ترکیبوں سے اوپر کی کسی نہ کسی معیاری صورت میں تحویل کرنے سے حل کر سکتے ہیں۔

$$\text{مثال ۱۔ } \frac{\text{حربا}}{\text{فرت}} = \text{ف (لا + ب م)} \\ \text{فرض کرو کہ } 1 + \text{لا} + \text{ب م} = \text{ی}$$

$$\text{تب } 1 + \text{ب م} = \frac{\text{حربا}}{\text{فرت}}$$

$$\text{پس } 1 + \text{ب م} = \text{ف (ی)} = \frac{\text{حربا}}{\text{فرت}}$$

$$\text{اور فرت} = \frac{\text{حربا}}{1 + \text{ب م} (ی)}$$

$$\text{یا لا + ج} = \frac{\text{حربا}}{1 + \text{ب م} (ی)}$$

مثال ۲۔  $لا^2 - \frac{ما}{حرا} (ما + لا \frac{حرا}{حرا}) = 1 = 0$

رکھو لا ما = ی

تب  $ما + لا \frac{حرا}{حرا} = \frac{حری}{حرا}$

$= لا (\frac{حری}{حرا} - ما) = 1 = 0$

یا  $ی = لا \frac{حری}{حرا} + \frac{1}{حری}$

جو کلیروی شکل کی مساوات ہے اور اسی کا کامل ابتدائی ہے

لا ما = لا ج +  $\frac{1}{ج}$

مثال ۳۔  $فوا^2 (لا + ما) = (1 - \frac{حرا}{حرا}) = فوا^2 + فوا (\frac{حرا}{حرا})$  کو حل کرو

فرض کرو کہ  $فوا = عا$  اور  $فوا = ضا$

اب چونکہ یہ مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے

$(فوا - فوا \frac{حرا}{حرا}) = 1 = (فوا \frac{حرا}{حرا})$

اس لئے اسے ہم یوں لکھ سکتے ہیں

$عا - ضا \frac{حرا}{حرا} = 1 + (\frac{حرا}{حرا})$

جو کلیروی شکل کی مساوات ہے، اس لئے اس کا کامل ابتدائی ہے

عا = ج ضا +  $\sqrt{1 + ج}$

یا  $فوا = ج فوا + \sqrt{1 + ج}$

مثال ۴-  $\overline{لا\ م} = \left(\frac{م}{لا}\right) + (لا - \overline{لا\ م}) \cdot \frac{م}{لا} = لا\ م = .$

(بہندہ جمعہات میں یہ مساوات اکثر واقع ہوتی ہے)

اس میں رکھو  $لا = اس$  اور  $م = ات$

مساوات مفروضہ ہو جاتی ہے

$\overline{لا\ اس\ ات} = \left(\frac{اس\ ات}{م\ ات}\right) + (س - ات - ب) \cdot \left(\frac{اس\ ات}{م\ ات}\right) - اس\ ات = .$

یا  $اس\ ات = \left(\frac{م\ ات}{م\ ات}\right) + (س - ات - ب) \cdot \frac{م\ ات}{م\ ات} - ات = .$

یعنی  $ات = (1 + \frac{م\ ات}{م\ ات}) = س = س\ ات = (1 + \frac{م\ ات}{م\ ات}) \cdot ب - ب\ ات$

جس سے حاصل ہوتا ہے  $ات = س = س\ ات = ب - \frac{م\ ات}{1 + \frac{م\ ات}{م\ ات}}$

جو کلیروی شکل ہے، اس کا کامل ابتدائی ہے

$ت = س\ ج - \frac{ب\ ج}{1 + \frac{ب\ ج}{ب\ ج}}$

یا  $ج\ لا - م = \frac{ب\ ج}{1 + \frac{ب\ ج}{ب\ ج}}$

اس کا تادر حل ہے  $لا \neq لا - م = \pm اب$

جو چار خطوط مستقیم ہیں۔

مثال ۵-  $(1 + لا\ لا) = \frac{م\ م}{لا\ لا} + لا\ لا + ق\ م = کو\ مل\ کو$

فرض کرو کہ مساوات کو ہم اس طرح تبدیل کرتے ہیں کہ

$$\frac{م^۲}{۱۷ + ۱۷۲} = مرت$$

اس طرح لا سیدھے تکمیل سے بطور ت کے تفاعل کے معلوم ہو سکتا ہے

$$اب \quad \frac{م^۲}{مرت} = \frac{م^۲}{۱۷ + ۱۷۲}$$

$$اور \quad \frac{م^۲}{مرت} - \frac{م^۲}{۱۷ + ۱۷۲} = \frac{م^۲}{مرت} - \frac{م^۲}{۱۷ + ۱۷۲} = \frac{م^۲}{مرت}$$

$$پس (۱ + ۱۷۲) \frac{م^۲}{مرت} = \frac{م^۲}{مرت} - \frac{م^۲}{مرت} \times \frac{م^۲}{مرت}$$

$$پس مساوات معلوم اس طرح کی مساوات  $\frac{م^۲}{مرت} + ق^۲ = م^۲$$$

میں تحویل ہو جاتی ہے، جس کا حل ہے

$$م = اوجب ق ت + بجم ق ت$$

اور جب ت کی قیمت لا کی رقوم میں مندرج کی جاتی ہے تو حل معلوم حاصل ہوتا ہے۔

اگر مثبت ہو تو

$$\frac{۱}{مرت} = \frac{۱}{۱۷ + ۱۷۲}$$

$$\frac{۱}{مرت} = \frac{۱}{۱۷ + ۱۷۲} = ت$$

$$اگر منفی ہو تو  $\frac{۱}{مرت} = \frac{۱}{۱۷ - ۱۷۲}$$$

یعنی  $\frac{1}{x-1}$  جب  $\sqrt{1-x}$  (لا)  $\sqrt{1-x} = t$  [ مثال ۶ - ذیل کی ہمزاد تفرقی مساواتوں کو حل کرو (جو مستقل سروں والی خطی مساواتیں ہیں)

$$۲ \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} + ۹ \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} + ۲۲ \text{ لا} + ۲۹ \text{ ما} = \text{ت}$$

$$۳ \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} + ۷ \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} + ۳۲ \text{ لا} + ۳۸ \text{ ما} = \text{ت}$$

ہم ان مساواتوں کو اس طرح لکھ سکتے ہیں ، عف ،  $\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}$  کی بجائے لکھا گیا ہے

$$۲ (\text{عف} + ۱۱ \text{ لا}) + ۹ (\text{عف} + ۲۹ \text{ ما}) = \text{ت}$$

$$۳ (\text{عف} + ۳۲ \text{ لا}) + ۷ (\text{عف} + ۳۸ \text{ ما}) = \text{ت}$$

ان مساواتوں پر بالترتیب ۷ عف + ۳۸ + اور ۹ عف + ۲۹ کے ساتھ عمل کرنے اور تفریق کرنے سے ہم ماکو ساقط کرتے ہیں اور حاصل ہوتا ہے

$$[۲ (\text{عف} + ۳۲ \text{ لا}) - ۳ (\text{عف} + ۲۹ \text{ ما})] \text{ لا}$$

$$= ۷۸ \text{ ت} - ۳۸ \text{ ت} - ۷۸ \text{ ت}$$

$$\text{یا } (\text{عف} + ۷ \text{ عف} + ۶) \text{ لا} = ۷۸ \text{ ت} - ۳۸ \text{ ت} - ۷۸ \text{ ت}$$

جس سے ملتا ہے  $\text{لا} = \frac{۷۸ \text{ ت} - ۳۸ \text{ ت} - ۷۸ \text{ ت}}{۷ \text{ عف} + ۶ \text{ عف} + ۶}$

$$\text{یا لا} = \frac{۷۸ \text{ ت} - ۳۸ \text{ ت} - ۷۸ \text{ ت}}{۷ \text{ عف} + ۶ \text{ عف} + ۶} + \frac{۱۹}{۳} (\text{ت} - \frac{۷}{۶}) - \frac{۲۹}{۷} \text{ ت}$$

ماکو حاصل کرنے کے لئے ہم  $\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}$  کو اصلی مساواتوں سے ساقط

کرتے ہیں، پہلی مساوات کو ۷ سے اور دوسری کو ۹ سے ضرب دو اور تفریق کرو، اس سے حاصل ہوگا

$$\frac{7\text{لا}}{7\text{رت}} + 2\text{لا} + 6 = 7\text{ت} - 9\text{قو}$$

$$\text{پس } 6 = 7\text{ت} - 9\text{قو} - 2\text{لا} - \frac{7\text{لا}}{7\text{رت}}$$

$$= 7\text{ت} - 9\text{قو} - 2\text{لا} - \left( \frac{7\text{ت}}{3} + \frac{19\text{ت}}{9} - \frac{52\text{ت}}{9} - \frac{19\text{قو}}{2} \right)$$

$$= (-9\text{قو} - 2\text{لا} + \frac{7\text{ت}}{3} + \frac{19\text{قو}}{2} - \frac{52\text{ت}}{9})$$

$$= -9\text{قو} + 2\text{لا} + \frac{7\text{ت}}{9} - \frac{19\text{قو}}{3} + \frac{22\text{قو}}{2} + \frac{55\text{ت}}{9}$$

$$\text{پس لا} = 9\text{قو} + 2\text{لا} + \frac{7\text{ت}}{9} - \frac{19\text{قو}}{3} - \frac{52\text{ت}}{9} - \frac{22\text{قو}}{2}$$

$$6 = -9\text{قو} + 2\text{لا} + \frac{7\text{ت}}{9} - \frac{19\text{قو}}{3} - \frac{52\text{ت}}{9} + \frac{55\text{ت}}{9} + \frac{22\text{قو}}{2}$$

[طالب علم  $\frac{7\text{لا}}{7\text{رت}}$  کے استقاط کا بغور ملاحظہ کرے، اس طرح زیادہ

مستقلات کو شریک کرنے کی ضرورت نہیں پڑتی]

مثال ۷۔ ذیل کی ہمزاد مساواتوں کو حل کرو

$$\frac{7\text{لا}}{7\text{رت}} + 3 = \frac{7\text{لا}}{7\text{رت}} + 12 = 6$$

$$\frac{7\text{لا}}{7\text{رت}} - 5 = \frac{7\text{لا}}{7\text{رت}} + 9 = 6$$

یہ مساواتیں اس طرح بھی لکھی جاسکتی ہیں

$$(عفا^۱ + ۱۶) لا + ۳ عفا = ما$$

$$- ۵ عفا لا + (عفا^۲ + ۹) ما =$$

ان مساواتوں پر بالترتیب عفا^۱ + ۹ اور ۳ عفا کے ساتھ عمل کرنے اور تفرقی کرنے سے ہم ما کو ساظ کرتے ہیں اور حاصل کرتے ہیں

$$[ (عفا^۱ + ۱۶) (عفا^۲ + ۹) + ۱۵ عفا^۱ ] لا =$$

$$یا (عفا^۲ + ۴۰ عفا^۱ + ۱۴۴) لا =$$

$$یعنی (عفا^۲ + ۴) (عفا^۲ + ۳۶) لا =$$

جس سے لا = (جیب ۲ ت + ب جہم ۲ ت + ج جیب ۶ ت + د جہم ۶ ت) ما کے تفرقی سروں کو ساظ کرنے کے لئے پہلی مساوات کو تفرقی کرو اور دوسری کے سہ چند کو اس سے تفرقی کرو اس طرح ملے گا

$$\frac{۲۴}{۳۱} = \frac{۲۴}{۳۱} لا$$

جس سے ہمیں ما کی قیمت حاصل ہوتی ہے بغیر نئے مستقلوں کو شریک کرنے کے

$$ما = ۲ ب جیب ۲ ت + ۲ ا جہم ۲ ت + \frac{۱}{۹} د جیب ۶ ت + \frac{۱}{۹} ج جہم ۶ ت$$

## مثله

$$۱- ۲ لا ما - \frac{۲۴}{۳۱} (۱- لا) ما = لا^۲$$

$$۲- ۲ ق ط ما - \frac{۲۴}{۳۱} (۲ جیب ما + \frac{۲۴}{۳۱} (مس ما = لا$$

$$۳- (۱+ ب لا) \frac{۲۴}{۳۱} + (۱+ ب لا) \frac{۲۴}{۳۱} + ب ما = لا$$

$$۴- (۱+ لا^۲) \frac{۲۴}{۳۱} + ۲ لا (۱+ لا) \frac{۲۴}{۳۱} + ما =$$



$$۵- (۱- لا^۲) \frac{فر۲}{فر۲لا} - لا \frac{فر۲}{فر۲لا} + ن^۲ ما = ۰$$

$$۶- \frac{فر۲}{فر۲لا} = فر۲ - لا (فر۲ - فر۲لا)$$

$$۷- \frac{فر۲}{فر۲لا} = ۲ جب \frac{لا- ما}{۲} \frac{لا+ ما}{۲} \frac{جم لا}{جم ما}$$

۸- ذیل کی تفرقی مساواتوں کے تکلی حاصل کرو

$$(۱) \frac{فر۳}{فر۳لا} - ۳ \frac{فر۲}{فر۲لا} + ۹ \frac{فر۲}{فر۲لا} + ۱۳ ما = ۰$$

$$(ب) \frac{فر۲}{فر۲لا} + ۶ \frac{فر۲}{فر۲لا} + ۹ ما = ۲۵ جم لا$$

$$(ج) لا^۲ \frac{فر۲}{فر۲لا} - ۵ لا \frac{فر۲}{فر۲لا} + ۱۰ ما = ۰ [آئی، سی، ایس] ۱۸۹۴$$

۹- ذیل کی ہمزاد مساواتوں کے نظام کو حل کرو

$$\frac{فر۲}{فر۲لا} + ۱۵ ما + ۳ سی = ۳۰ = ۰$$

$$\frac{فر۳}{فر۳لا} + ۲ ما + ۱۰ سی = ۴ = ۰ [آئی، سی، ایس] ۱۸۹۴$$

۱۰- اس منحنی کی شکل معلوم کرو جس میں رواں مماس کے میلان کا مماس محور لا کے ساتھ اس نقطہ کے محدودوں کے حاصل ضرب کے متناسب ہے۔

۱۱- ایک منحنی میں کسی نقطہ پر کا انحنایہ بدلتا ہے جیسے اس زاویہ کی جیب التمام کا مکعب جو نقطہ مذکورہ پر کا مماس محور لا کے ساتھ بناتا ہے، منحنی کی صورت معلوم کرو۔

۱۲- جس منحنی میں انحنایہ کے نصف قطر کا ظل محور ما پر منتقل ہو

اس کے لئے ثابت کرو کہ

$$(1) \quad s \infty \text{ لوک مس } \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$(2) \quad \text{ما } \infty \text{ لوک قط } \frac{\pi}{4}$$

نوٹ۔ (۱) میں  $s$  قوس کا طول ہے اور  $\pi$  محاس کا میلان ہے محور لا کے ساتھ۔



# جوابات

صفحہ (۶)

$$۱۔ لا مس لا۔ لوک قظ لا = ماس ما۔ لوک قظ ما + ج$$

$$۲۔ لا۔ ما + لا۔ ما + لا۔ ما + لا۔ ما = ج$$

$$۳۔ لا ما + لا ما + ج (لا + ما + ا) = ا$$

$$۵۔ لوک (لا + ما) = لوک لا + مس لا + ج$$

$$۶۔ ۳ (لو۔ لو) = لا + ج$$

$$۹۔ (۱) ما = ج و (۲) ما = لا + ج$$

$$(۳) ر (ج - طه) = ا (۴) ر = ا طه + ج$$

$$۱۰۔ لا = لا۔ ما + لا۔ ما + لوک  $\frac{لا۔ ما}{لا۔ ما + ا}$  اگر ما = ا جبکہ لا =$$

صفحہ (۱۱)

$$۱۔ ۲ ما و = مس لا + مس لا + ج$$

$$۲۔ (ا + با) ما = ا ج ب لا۔ ب ج ب لا + ج و لا$$

$$۳ - رطه = ا = \frac{طه^{۲+۵}}{۲+۵} + ج$$

$$۴ - م لا م = م ا + ج - ۵ - لا ق و س ا = مس ا + م + ج$$

$$۶ - م ا ق و ل ا = م ا ل ا + ج - ۸ - ل ا + م ا + ر ل ا + ج = \frac{۲}{۲} ج ق و ل ا$$

$$۹ - \frac{۱}{لا م} = \frac{۱}{ج + م ل ا} - ۱۰ - \left( \frac{۱}{لا م} \right) = \frac{۱}{ج + \frac{۱}{۲-۵+۲}} = \frac{۱}{ج}$$

$$۱۱ - \frac{۱}{۱-۵ م} = ۱ + ج ق و \frac{۲}{۲} (۱-۵) - ۱۲ - ل ا ج ب م = \frac{۱}{ج + \frac{۱}{۲-۵ م}}$$

$$۱۳ - ل ا ل و ک ی = \frac{۱}{ج + \frac{۱}{۲-۵ م}} - ۱۴ - ق و = \frac{۱}{ج + ۱} = \frac{۱}{۲} (۱-۵) ق و$$

$$۱۵ - \frac{۱}{ر} = \frac{۱}{ج + \frac{۱}{ر}} - ۱۶ - \frac{۱}{ر} = \frac{۱}{ج + \frac{۱}{۱-۵ ر}} = \frac{۱}{ج ق و} (۱-۵) ر$$

$$۱۸ - (۱) \frac{۱}{لا} = \frac{۱}{ج + \frac{۱}{۲-۵ لا}} (۲) (ا + ب) ق و = ل ا ج ب ل ا ج ب ل ا ج ق و$$

$$(۳) ج ب م = \frac{۱}{ج + ۱} (۴) ف (م) + ف (لا) + ج = ۱ ق و (لا)$$

صفحہ (۱۷)

$$۱ - \frac{۱}{۲} ل و ک (د + د - ۱) + \frac{۱}{۵+۲} ل و ک \frac{۱}{۵+۲} + \frac{۱-۱+۲}{۵+۱+۲} ل و ک ل ا ج ج ہاں د = \frac{۱}{۲}$$

$$۲ - \frac{۱}{۲} ل و ک (۱ + د + د - ۳) + \frac{۱}{۳+۲} ل و ک \frac{۱}{۳+۲} + \frac{۱-۱+۲}{۳+۱+۲} ل و ک ل ا ج ج$$

$$\frac{b}{a} = 2 \text{ جہاں}$$

$$۳ - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = ج \quad ۴ - ع حاصل اسقاطاً = لا (ع + ع') \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{اور لا} = \frac{ج}{۲ع} \text{ و } \frac{1}{۲ع'} \end{array} \right.$$

۵ - ع حاصل اسقاط ذیل کی مساواتوں کا

$$a = لا (ا + ع' + باع + ج)$$

$$\text{اور لوک لا} \{ ا + ع' + (ب - ا) + ج \}$$

$$+ \frac{۲}{\sqrt{۴(ج - (ب - ا))}} \text{ سر } ۱ - \frac{۲(ا + ع + ب - ا)}{\sqrt{۴(ج - (ب - ا))}} = \text{مستقل}$$

صفحہ (۲۰)

$$۱ - (ا - لا) = ج (ا + لا) \quad ۲ - (ا - لا) = ج (ا + لا + ۲)$$

$$۳ - \frac{۳ + ۲}{۳ + ۲} \text{ لوک } \left( \frac{ا}{۱ - لا} + ۱ - (۳) \right) - \frac{۳ - ۲}{۳ + ۲} \text{ لوک } \left( \frac{ا}{۱ - لا} + ۱ + (۳) \right) + \text{لوک } (ا - لا) = ج$$

$$۴ - (ا + ب) \text{ لوک } (ا - لا + ۱) + (ب - ا) \text{ لوک } (ا + لا - ۱) = ج$$

$$۵ - لا - ا + لوک (ا + لا) = ج$$

$$۶ - ا - لا = ۳ - لا = لوک (۳ + لا + ۳ + ۲) + ج$$

$$۷ - لا + ا + ۳ - لا = ۳ - لا = ۱۰ - لا - ا + ج =$$

$$۸ - لا - ا + ۴ - لوک (۲ + لا + ۳ + ۷) = ج$$

صفحہ (۲۵)

$$۱- م + ا = ج \quad ۲- م + \frac{لا}{۲} = لوک + ج$$

$$۳- م + \frac{۲}{۳} (لا + ۱) = ۲ - \frac{۳}{۲} (لا + ۱) \quad ج = \frac{۱}{۲}$$

$$۴- لا (لا + ۱۲) = ج \quad ۲ = ج$$

$$۵- ۴ لا = م + ۳ لا - ۱ - \frac{۳}{۲} لوک (۱ + ۲) + ج$$

$$۶- جم = \left\{ \frac{۱ - (لا - ۱) - ۲ - م}{لا - ۱} \right\} = ۱ - لا$$

$$۷- لا = \frac{۳}{۲} (ع + ۲ ب + ع) + ج$$

$$م = ۱ ع + ۲ ب$$

$$۸- م = \frac{۳}{۲} (ق + ۲ ب + ق) + ج$$

$$لا = ۱ ق + ۲ ب$$

صفحہ (۲۸)

$$۱- م = ج + لا \quad ۲- لا + م = م$$

$$۲- م = ج + لا \quad ۳- م + لا = م$$

$$۳- م = ج + لا \quad ۴- م + (۱ - ن) = لا$$

$$۴ - ۱ = ۱ = \frac{۲}{۱} + \frac{۲}{۱} \quad ' \quad \overline{۱ + ۱} = ۱ + ۱ = ۲$$

$$۵ - ۱ = ۱ = (۱ - ۱) = ۰ \quad ' \quad \overline{۱ - ۱} = ۰$$

$$۶ - ۱ = ۱ = (۱ - ۱) = ۰ \quad ' \quad \overline{۱ - ۱} = ۰$$

صفحہ (۳۰)

$$\begin{cases} ۱ - ۱ = ۱ = ۱ + ۱ = ۲ \\ ۲ - ۱ = ۱ = \frac{۲}{۱} + \frac{۲}{۱} = ۴ \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۳ - ۱ = ۱ = ۱ + ۱ = ۲ \\ ۴ - ۱ = ۱ = (۱ - ۱) = ۰ \\ ۵ - ۱ = ۱ = (۱ - ۱) = ۰ \\ ۶ - ۱ = ۱ = (۱ - ۱) = ۰ \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۵ - ۱ = ۱ = (۱ - ۱) = ۰ \\ ۶ - ۱ = ۱ = (۱ - ۱) = ۰ \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۶ - ۱ = ۱ = ۱ + ۱ = ۲ \\ ۷ - ۱ = ۱ = \frac{۲}{۱} + \frac{۲}{۱} = ۴ \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ۷-۷ = ۷ + ۷ + ۷ \\ ۷ = \frac{1}{1-1} \cdot \frac{۷}{۷-1} + ۷ \end{array} \right.$$

۸- قائم زائد

۹- مکانی جو محوروں کو مس کرتا ہے ۱۰- قطع زائد

۱۱- چار قرون والا درتدیر لا + ما + و = و

۱۲- ۷ = ۷ (۱-۷)

۱۳- ۷ = و + و + ج (۱ + و)

۷ = ج  $\frac{۷ جب ط - ۱}{ج ط}$ لا = لوک  $\frac{۷ ج جب ط}{ج ط}$ ۱۴- ۷ = ج لا -  $\frac{۷ ج}{۷ + ج}$  فروٹیوں کا ایک سلسلہ جو چار خطوط

ستقیم لا ± لا - ۷ = ۷ ± ۷ کو مس کرتا ہے ناور ط ہے

صفحہ (۳۶)

۱- ۷ = لا لوک لا + لا + ب ۲- ۷ = و + و (لا + ب)

۳- ۷ =  $\frac{۷}{۷} - لا لوک لا + ب$  ۴- ۷ =  $\frac{۷ (۷ + ۷)}{۷}$  + ب



$$5- (لا-ا) + (ما-ب) = ر \quad 6- لا+ب = \int \frac{رما}{\sqrt{لا^2+لا-1}} \quad 7- لا+ب = \int \frac{رما}{\sqrt{لا^2+لا-1}}$$

$$6- ما+ب = \int \frac{رما}{\sqrt{لا^2+لا-1}} \quad 7- لا+ب = \int \frac{رما}{\sqrt{لا^2+لا-1}}$$

$$8- \frac{ما}{لا} = \int \left( \frac{1}{لا} + \frac{1}{لا^2} \right) \quad 9- لا+ب = \int \frac{رما}{\sqrt{لا^2+لا-1}}$$

$$9- ما = ب \quad 10- لا+ب = \int \frac{رما}{\sqrt{لا^2+لا-1}}$$

$$10- لا+ب = \int \frac{رما}{\sqrt{لا^2+لا-1}} \quad 11- ما = ب$$

$$11- ما = ب$$

صفحہ (۴۲)

$$1- لا+ما = ر+لا+ب+ج$$

$$2- (لا+ج) = ما+ج+لا+ب+ج$$

$$3- (ا) لا+ما = ر+لا+ب+ج$$

$$(ب) لا+ما = ر+لا+ب+ج$$

$$(ج) لا+ما = ر+لا+ب+ج$$

$$+ \frac{1}{لا+ما} = لا(لا+ما)$$

## صفحہ (۵۵)

اس نمبری کے جوابات میں  $\frac{1}{2}$  ب کج وغیرہ اختیاری مستقل ہیں۔

$$۱- \text{ا} = \frac{1}{2} \text{و} + \frac{1}{2} \text{ب} + \frac{1}{2} \text{و} \quad ۲- \text{ا} = \frac{1}{2} \text{و} + \frac{1}{2} \text{ب} + \frac{1}{2} \text{و} + \frac{1}{2} \text{ج} + \frac{1}{2} \text{و}$$

$$۳- \text{ا} = \frac{1}{2} \text{و} + \frac{1}{2} \text{ب} + \frac{1}{2} \text{و} + \frac{1}{2} \text{ج} + \frac{1}{2} \text{و} \quad ۴- \text{ا} = \frac{1}{2} \text{و} + \frac{1}{2} \text{ب} + \frac{1}{2} \text{و} + \frac{1}{2} \text{ج} + \frac{1}{2} \text{و}$$

$$۵- \text{ا} = \frac{1}{2} \text{و} + \frac{1}{2} \text{ب} + \frac{1}{2} \text{و} + \frac{1}{2} \text{ج} + \frac{1}{2} \text{و} + \frac{1}{2} \text{ج} + \frac{1}{2} \text{و} + \frac{1}{2} \text{ج} + \frac{1}{2} \text{و}$$

$$۶- \text{ا} = \frac{1}{2} \text{و} + \frac{1}{2} \text{ب} + \frac{1}{2} \text{و} + \frac{1}{2} \text{ج} + \frac{1}{2} \text{و} + \frac{1}{2} \text{ج} + \frac{1}{2} \text{و} + \frac{1}{2} \text{ج} + \frac{1}{2} \text{و}$$

$$۷- \text{ا} = \frac{1}{2} \text{و} + \frac{1}{2} \text{ب} + \frac{1}{2} \text{و} + \frac{1}{2} \text{ج} + \frac{1}{2} \text{و} + \frac{1}{2} \text{ج} + \frac{1}{2} \text{و} + \frac{1}{2} \text{ج} + \frac{1}{2} \text{و}$$

$$۸- \text{ا} = \frac{1}{2} \text{و} + \frac{1}{2} \text{ب} + \frac{1}{2} \text{و} + \frac{1}{2} \text{ج} + \frac{1}{2} \text{و} + \frac{1}{2} \text{ج} + \frac{1}{2} \text{و} + \frac{1}{2} \text{ج} + \frac{1}{2} \text{و}$$

$$۹- \text{ا} = \frac{1}{2} \text{و} + \frac{1}{2} \text{ب} + \frac{1}{2} \text{و} + \frac{1}{2} \text{ج} + \frac{1}{2} \text{و} + \frac{1}{2} \text{ج} + \frac{1}{2} \text{و} + \frac{1}{2} \text{ج} + \frac{1}{2} \text{و}$$

$$۱۰- \text{ا} = \frac{1}{2} \text{و} + \frac{1}{2} \text{ب} + \frac{1}{2} \text{و} + \frac{1}{2} \text{ج} + \frac{1}{2} \text{و} + \frac{1}{2} \text{ج} + \frac{1}{2} \text{و} + \frac{1}{2} \text{ج} + \frac{1}{2} \text{و}$$

$$+ (\text{گ} + \text{م} + \text{لا}) + \frac{1}{2} \text{و} + \frac{1}{2} \text{ج} + \frac{1}{2} \text{و} + \frac{1}{2} \text{ج} + \frac{1}{2} \text{و} + \frac{1}{2} \text{ج} + \frac{1}{2} \text{و}$$

$$۱۱- \text{ا} = \frac{1}{2} \text{و} + \frac{1}{2} \text{ب} + \frac{1}{2} \text{و} + \frac{1}{2} \text{ج} + \frac{1}{2} \text{و} + \frac{1}{2} \text{ج} + \frac{1}{2} \text{و} + \frac{1}{2} \text{ج} + \frac{1}{2} \text{و}$$

$$+ (\text{گ} + \text{م} + \text{لا}) + \frac{1}{2} \text{و} + \frac{1}{2} \text{ج} + \frac{1}{2} \text{و} + \frac{1}{2} \text{ج} + \frac{1}{2} \text{و}$$

$$۱۲-۶ = (۱+ب\text{ لا}) \text{ جب لا} + (ج+د\text{ لا}) \text{ جم لا} + ع \text{ جب ب لا}$$

+ فِ جَم بِلَا + گِ فِ جِب جِلَا + هِ فِ جَم جِلَا

$$+ \text{س} \frac{1}{2} \text{و} \frac{1}{2} \text{جب} \frac{1}{2} \text{ج} \frac{1}{2} \text{لا} \frac{1}{2} \text{س} + \text{ص} \frac{1}{2} \text{و} \frac{1}{2} \text{ج} \frac{1}{2} \text{لا} \frac{1}{2} \text{س} \frac{1}{2}$$

صفحہ (۵۹)

$$\frac{y_{-2}}{1r.} + \frac{y_{-1}}{1r.} (r) - \frac{y_{-1}}{(r+1)(1+r)} (r) - \frac{y_{-1}}{r} (1) = 1$$

صفی (۶۲)

۴۰۔  $\frac{f}{g}$ ۔ فوجب لا، لا فو لوک (۱/۲)

صفحہ (۶۳)

۱۔  $\frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{2} \text{جم} (b-a) = \frac{a}{2}$

$$\frac{V_1}{V_2} - \frac{V_2}{V_1} = \text{حجم (۲-۱-۲)}$$

$$\frac{1}{n} \left\{ \frac{3}{\sqrt{2}} \text{ جب } \left( \frac{\pi}{2} - \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ جب } \left( \frac{\pi}{2} - \right) \right\}$$

۱/۴ (جب لا جنبر لا - جم لا جنبر لا)

$$۲ - \frac{1}{4} \text{ جب } ۲ \text{ لا، } \frac{1}{4} \text{ جم لا، } -\frac{3}{16} \text{ جب } ۲ \text{ لا}$$

صفحہ (۶۵)

$$\frac{قو (جب لا جم لا)، قو ۴ (۱-قو) جب لا + (قو-۶+۱) جم لا}{قو (۱+قو)}$$

۲- جم لا جم لا

صفحہ (۶۷)

$$۱ - \frac{لا^۲}{۲} - \frac{۳}{۲} لا + \frac{۷}{۴} - \frac{لا^۲}{۲} لا، \frac{لا^۲}{۴} + لا^۲$$

$$۲ - قو (\frac{لا^۲}{۴} - \frac{۵}{۱۸} لا + \frac{۱۹}{۱۰۸})، قو (\frac{لا}{۲} - \frac{لا^۲}{۴}) + قو (\frac{۳}{۸} + \frac{لا}{۴})$$

$$۳ - \frac{1}{4} قو (لا جب لا جم لا) - قو \frac{۱}{۱۰} (لا + \frac{۳}{۵}) جم لا - (لا + \frac{۴}{۵}) جب لا$$

صفحہ (۷۲)

$$۱ - (۱) - \frac{لا جم لا}{۲} (۲) \frac{لا جب لا}{۴} (۳) \frac{لا جم لا}{۲}$$

$$(۴) قو (\frac{لا}{۳} - \frac{لا^۲}{۴}) (۵) \frac{لا قو}{۲} (۶) \frac{لا}{۴} (جم لا + جم لا)$$

$$(۷) \frac{لا}{۲} (\frac{قو}{۱} - \frac{قو}{۲} + \frac{قو}{۲}) (۸) \frac{لا}{۴} جب لا جب لا$$

$$۲ - (۱) = ۱ + قو + قو + قو = \frac{1}{۳} قو$$



$$+ \frac{1}{2} - \frac{1}{32} لا اُجب لا + \frac{لا^2 ق}{8} + لا + 2$$

صفحہ (۷۵)

$$۱- ما = اُجب (ق لوک لا) + اُجم (ق لوک لا)$$

$$۲- ما = اُجب (ق لوک لا) + اُجم (ق لوک لا) + \frac{لا (لوک لا)^2}{ق} - \frac{2}{ق}$$

$$+ لا \frac{ق اُجب (لوک لا) - 2 اُجم (لوک لا)}{ق + 2} - \frac{لوک لا اُجم (ق لوک لا)}{ق 2}$$

$$۳- ما = \frac{1}{4} + اُجم (لا اُجب) \frac{3}{2} لوک لا + اُجم (لا اُجب) \frac{3}{2} لوک لا$$

$$+ \frac{لا}{4} + لوک لا$$

$$۴- ما = \frac{1}{4} + اُجم لا + اُجم لا لوک لا + \frac{لا (لوک لا)^2}{4} + \frac{لا}{16}$$

$$۵- ما = اُجب \left\{ \frac{ق}{ب} لوک (ا + ب لا) \right\} + اُجم \left\{ \frac{ق}{ب} لوک (ا + ب لا) \right\}$$

صفحہ (۷۶)

$$۱- 2 لا + ما = ب ۳- ر = ب ق ط س ع ۴- 2 ب = ا اجم ط$$

صفحہ (۸۹)

$$۱- رکھو ما = لا سی، ما = لا ۲- لا ۲ + لا + ج لا ق لا$$

$$۲- رکھو مس = سی، مس = ا اجم لا + ب اُجب لا + لا$$

۳۔ رکھو  $ل + ب = لا = قو = ما = ج (ل + ب = لا) + د (ل + ب = لا) = م$

$$- \frac{ل + ب = لا}{ب (ب + ل = لا)} + \frac{ل}{ب = لا}$$

جہاں  $م = م$  مساوات  $ب = م + (ل + ب = لا) = م + ب =$   
کی اصلیں ہیں۔

۴۔ رکھو  $می = سن = لا = ما = (ل + لا = ب) / لا + لا$

۵۔ رکھو  $می = جب = لا = ما = جب (ن جب = لا)$

+ ب جم (ن جب = لا)

۶۔ رکھو  $قو = ضا = قو = عا = (قو - قو = لا) + قو = لا$

۷۔ رکھو  $جب لا = ضا = جب = ما = عا = (جب ما = جب لا + لا) + قو = لا$

۸۔ (د)  $ما = لا + قو + ب قو = جب لا + ج قو = جم لا$

(ب)  $ما = (ل + ب = لا) + قو + جم لا + ج جب لا$

(ج)  $ما = لا + جب (لوک لا) + ب لا = جم (لوک لا)$

۹۔  $ما + لا = جب لا + ب جم لا + ج جب لا + د جم لا$

۳ =  $می = لا + جب لا + ب جم لا + ج جب لا + د جم لا$

۱۰۔  $ما = لا + قو$  ۱۱۔  $ما = لا + لا + ب$

— — —

# فہرست اصطلاحات

Canonical form

صورت آئینی

Clairaut's form

کلیر دی صورت

Commutative law

قانون مبادلہ

Complementary Function

متمم تفاعل

Complete primitive

کامل ابتدائی

Distributive law

قانون تقسیمی

Elimination

استقاط

"Exact" Differential Equations

"ٹھیک" یا حاضر مساواتیں

Homogeneous Equations

متجانس مساواتیں

Index law

قانون قوت نما

Irreversible process

غیر انقلاب پذیر عمل

Linear Equations

خطی مساواتیں

Operator

عامل

Order

رتبہ

Orthogonal trajectory

قائم مرقی

Particular integral

خاص انتگرالی

Rigid Dynamics

استوار اجسام کا علم حرکت

Singular Solution

ناور حل



## ترتیب

$$\frac{dy}{dx} \quad \frac{d^2y}{dx^2} \quad \text{ect}$$

در ما ، در ما و غیرہ  
فر لا فر لا

$$\frac{dy}{dx}$$

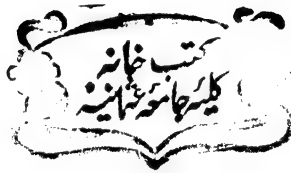
جف ما  
جف لا

$$\int f(x) dx$$

ف (لا) فر لا

$$D \left( \frac{d}{dx} \right)$$

عف (= فر لا)





آخری درج شدہ تاریخ پر یہ کتاب مستعار لی گئی تھی مقررہ مدت سے زیادہ رکھنے کی صورت میں ایک آٹھ یومیہ دیرانہ لیا جائے گا۔









